NIVELAMENTO MATEMÁTICA

EAD.FAMINAS

ENSINO A DISTÂNCIA

S231m Santos, Érica Marques da Silva
Matemática - nivelamento. / Érica Marques da Silva Santos; Fernanda Cristina Abrão da Rocha (rev.org.); Jéssica Aparecida Corrêa do Espírito Santo (edit.). – Muriaé: FAMINAS, 2015.
160 p.

ISBN: 978-65-89983-06-4

1. Matemática. I. SANTOS, Érica Marques da Silva. II. Rocha, Fernanda Cristina Abrão da. (rev.org.) III. ESPÍRITO SANTO, Jessica Ap. Corrêa do. (edit.) IV. Título.

CDD 510

Ficha catalográfica elaborada pela Bibliotecária Cristina de Souza Maia- CRB6 2294

SUMÁRIO

MÓDULO I 4
UNIDADE I - CONJUNTO E ELEMENTOS 4
MÓDULO II 17
UNIDADE I - EQUAÇÕES DE 1º GRAU 17
MÓDULO III 22
UNIDADE I - INEQUAÇÕES DE 1º GRAU 22
MÓDULO IV 25
UNIDADE I - SISTEMA DE EQUAÇÕES DE 1º GRAU COM DUAS VARIÁVEIS 25
MÓDULO V 31
UNIDADE I - EQUAÇÃO DE 2º GRAU 31
MÓDULO VI 40
UNIDADE I - EXPRESSÕES ALGÉBRICAS 40
MÓDULO VII 44
UNIDADE I - PRODUTOS NOTÁVEIS 44
MÓDULO VIII 47
UNIDADE I - FATORAÇÃO 47
MÓDULO IX 54
UNIDADE II - FRAÇÕES DECIMAIS, PORCENTAGEM E POTENCIAÇÃO 54
MÓDULO X 77
UNIDADE II - FUNÇÕES 77
MÓDULO XI 117
UNIDADE II - FUNÇÕES 117

MÓDULO I

UNIDADE I - CONJUNTO E ELEMENTOS

Objetivos

- Perceber situações em que se aplica a noção de conjunto.
- Descrever conjuntos
- Efetuar operações com conjuntos
- Resolver problemas aplicando os conceitos associados a conjuntos
- Identificar uma função utilizando o produto cartesiano
- Analisar e construir o gráfico de uma função com os pares ordenados

ASSUNTOS

- Noção de conjunto e elemento
- Representação de conjuntos
- Relação de pertinência
- Operações com conjuntos
- Produto Cartesiano
- Atividades resolvidas

NOÇÕES INTUITIVA DE CONJUNTO E ELEMENTO

CONJUNTOS

A noção de conjunto, em Matemática, é praticamente a mesma utilizada na linguagem do dia-a-dia:

- Agrupamento

- Classe

- Colecção...

Por exemplo:

Conjunto das letras do alfabeto;

Conjunto dos dias da semana;

Conjunto dos números inteiros;

Conjunto dos números pares;

Desta forma, podemos definir conjunto como sendo a reunião de elementos que possuem alguma característica ou propriedade em comum.

ELEMENTO

Cada membro ou objeto que entra na formação do conjunto.

Assim:

- v, i, c - são **elementos** do primeiro conjunto;
- Sábado, domingo - são **elementos** do segundo conjunto;
- 7 e 23 – são **elementos** do terceiro conjunto;
- 6 e 22 - são **elementos** do quarto conjunto.

REPRESENTAÇÃO DE CONJUNTOS

REPRESENTAÇÃO TABULAR – esta notação consiste em citar os elementos do conjunto separados por vírgulas e entre chaves. → A={0,1,2,3,4,5}

REPRESENTAÇÃO DESCREVENDO A PROPRIEDADE QUE É COMUM A TODOS OS ELEMENTOS QUE PERTENCEM A ESSE CONJUNTO – escrever dentro de chaves uma propriedade que caracterize todos os elementos do conjunto.

↓

A={números inteiros menores que 6}

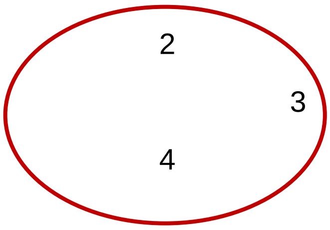
O conjunto dos números inteiros representa-se por $\mathbb{Z}$ → $\mathbb{Z}$ = {números inteiros} = {-3,-2,-1,0,1,2,...}

O conjunto dos números naturais representa-se por $\mathbb{N}$ → $\mathbb{N}$ = {números naturais} = {1,2,3,4,5,…}

Nos dois conjuntos anteriores não é possível enumerar todos os seus elementos – designam-se por conjuntos infinitos.

Nos conjuntos A={3,4,5,6} e B={44,46,47} é possível enumerar todos os seus elementos – designam-se por conjuntos finitos.

REPRESENTAÇÃO GRÁFICA –



RELAÇÃO DE PERTINÊNCIA

3 é elemento de

3 faz parte de A

3 pertence a A

9 não é elemento de A

9 não faz parte de A

9 não pertence a A

$$3 \in A \qquad\qquad 9 \notin A$$

$\in$ **PERTENCE A**

$\notin$ **NÃO PERTENCE**

Considera o conjunto: A={3,4,5,6,7,8}

CONJUNTOS NUMÉRICOS

- **CONJUNTO DOS NÚMEROS NATURAIS – N = {0,1,2,3,4,...}**

  Tem como elementos números inteiros e positivos.

- **CONJUNTO DOS NÚMEROS INTEIROS – Z = { ..., -3,-2,-1,0,1,2,3,...}**

  Tem como elementos números inteiros positivos e negativos.

- **CONJUNTO DOS NÚMEROS RACIONAIS - Q = { $\frac{a}{b}$, onde a e b $\in$ Z/ b $\neq$ o}**

  Tem como elementos números inteiros positivos e negativos, decimal finito e dizimas periódicas.

- **CONJUNTO DOS NÚMEROS IRRACIONAIS - I**

  Tem como elementos decimais infinitos sem período.

- **CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS - R**

  Tem como elementos os números que compõem o conjunto Racional e Irracional simultaneamente. $\Re = Q \cup I$

RELAÇÃO DE CONJUNTOS

Os elementos do Conjunto N pertencem aos demais conjuntos exceto o conjunto irracional.

O conjunto Z pertence aos conjuntos Q e R

O conjunto Q engloba os elementos do conjunto N e Z simultaneamente

Os elementos do conjunto I não se associam com os demais conjuntos

O conjunto R é resultado da união entre os demais conjuntos, ou seja, conjuntos N, Z, Q e I

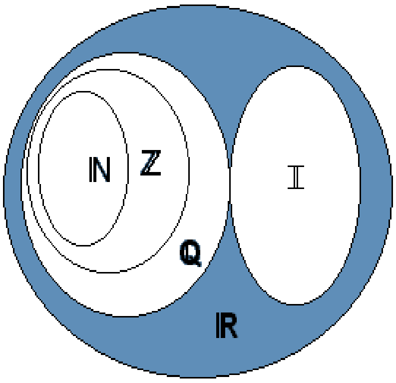


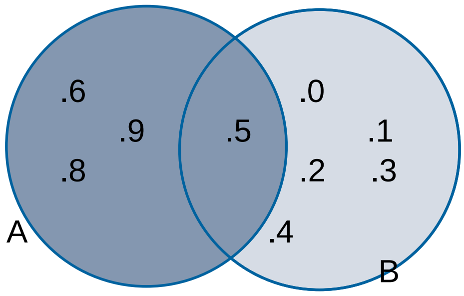
Diagrama Numérico

OPERAÇÕES COM CONJUNTOS

UNIÃO

Conjunto união são todos os elementos dos conjuntos relacionados. Dado o conjunto A={5,6,8,9} e o Conjunto B={0,1,2,3,4,5}, o conjunto

$$A \cup B = \{0,1,2,3,4,5,6,8,9\}$$



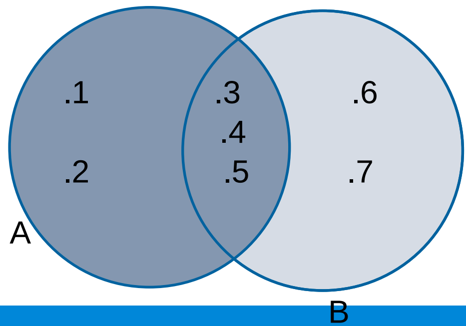
INTERSEÇÃO

Os elementos que fazem parte do conjunto intersecção são os elementos comuns a os conjuntos relacionados.

Exemplo:

Dados os conjuntos A = {1,2,3,4,5} e B = {3,4,5,6,7}

$A \cap B = \{3,4,5\}$



No diagrama acima percebemos que os elementos da interseção são os números 3, 4 e 5; ou seja, elementos que pertencem aos dois conjuntos simultaneamente.

DIFERENÇA DE DOIS CONJUNTOS

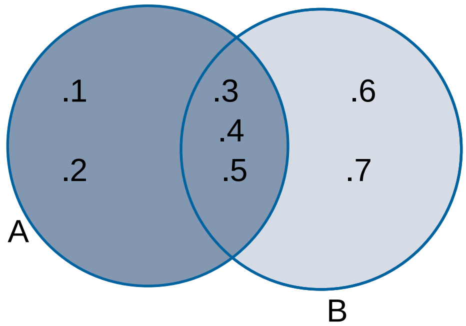
Dados dois conjuntos A e B chama-se conjunto diferença ou diferença entre A e B o conjunto formado pelos elementos de A que não pertencem a B.

O conjunto diferença é representado por A – B.

Exemplo:

Dados os conjuntos A={1,2,3,4,5} e B = {3,4,5,6,7}, faça A-B:

A – B = {1,2}



Os números 1 e 2 pertencem exclusivamente ao conjunto A

PRODUTO CARTESIANO

O **produto cartesiano** de dois conjuntos **A** e **B** são todos os **pares ordenados (x, y)**, sendo que **x** pertence ao conjunto **A** e **y** pertence ao conjunto **B**.

Vamos tomar como exemplo os seguintes conjuntos **A** e **B**:

A = {1,2,3}

B = {2,4,6}

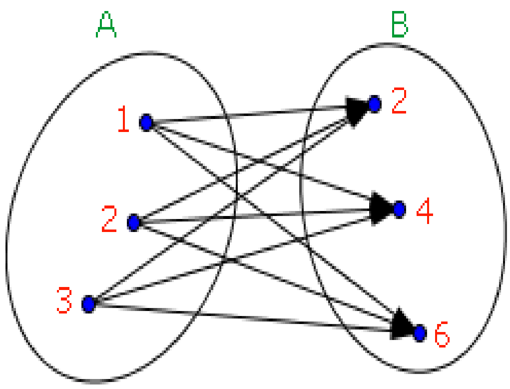
O **produto cartesiano de A por B**, representado por A x B é igual a:

A X B = {(1,2),(1,4),(1,6),(2,2),(2,4),(2,6),(3,2),(3,4),(3,6)}

Note que segundo a definição de produto cartesiano, todos os elementos de A X B são pares ordenados em que o primeiro elemento pertence ao conjunto **A** e o segundo ao conjunto **B**.

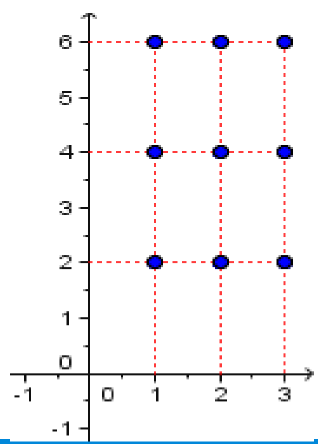
Representação em um Diagrama de Flechas

Também podemos representar A **X B** através de um **diagrama de flechas**. Repare que de cada elemento de **A** parte uma seta para cada elemento de **B**. No total são **9** flechas, uma para cada **par ordenado** resultante do produto cartesiano de **A** por **B**.



REPRESENTAÇÃO NO PLANO CARTESIANO

Uma outra forma de representação é através do sistema de coordenadas cartesianas. Veja que graficamente localizamos no PLANO CARTESIANO todos os nove elementos de A X B. Os elementos de **A** e **B** estão representados respectivamente nos eixos **x** e **y**. Finalmente também podemos representar A X B por: A X B ={ (x,y)/ x $\in$ A e y $\in$ B}
A cartesiano **B** é o conjunto dos pares ordenados **(x, y)**, tal que **x** pertence a **A** e **y** pertence a **B**.



NÚMERO DE ELEMENTOS DA UNIÃO DE DOIS OU TRÊS CONJUNTOS

O número de elementos da união de dois conjuntos é igual a diferença entre a soma do número de elementos de cada um desses conjuntos e o número de elementos da interseção:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Onde:

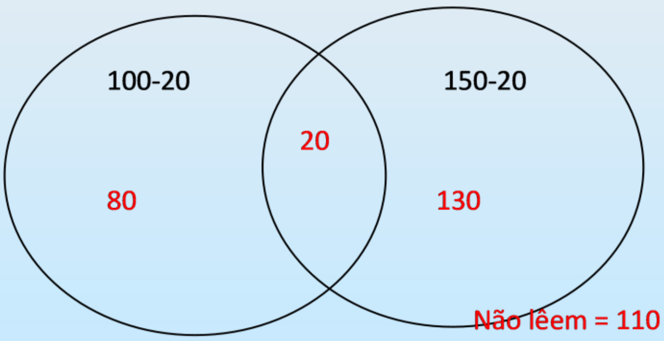
$n(A \cup B)$ = número de elementos da união de A com B.

$n(A)$ = número de elementos do conjunto A.

EXEMPLO

Numa pesquisa realizada verificou-se que, das pessoas consultadas 100 liam o jornal A, 150 liam o jornal B, 20 liam os dois jornais A e B e 110 não liam nenhum dos jornais. Quantas pessoas foram consultadas?

RESOLUÇÃO: A solução deste problema é encontrada através do diagrama, uma vez que existem pessoas que gostam de duas coisas ao mesmo tempo. Toda vez que o problema trouxer tal informação iremos utilizar deste recurso de diagrama.



Assim o número total de pessoas entrevistadas é : 80+20+130+110 = **340**

$n(B)$ = número de elementos do conjunto B.

$n(A \cap B) =$ número de elementos da interseção de A com B.

ATIVIDADES RESOLVIDAS E COMENTADAS

1. Uma pesquisa realizada pelo Colégio Muriaé detectou que 500 alunos gostam de matemática, 700 de português, 300 das duas disciplinas e 1 000 alunos afirmam não gostam de nenhuma destas. Nestas condições, quantos foram os entrevistados?

a) 2500 alunos

b) 2000 alunos

c) 1900 alunos

d) 900 alunos

2 . São considerados conjuntos um agrupamento de objetos de qualquer natureza, sempre distintos e determinados, chamados de elementos do conjunto.

Se M = {1, 2, 3, 4, 6} e N são conjuntos tais que M ∪ N = {1, 2, 3, 4, 6} e M ∩ N = {1, 2, 6}, então o conjunto N é:

a) Vazio

b) {4, 6}

c) {1, 2, 6}

d) {1, 2, 3, 4, 6}

3. Sabendo que os símbolos U e ∩ significam união e interseção, e respectivamente dados os conjuntos A = {a,b,c,d}, B = {c,d,e,f} e C = {e,f,g,h}, analise os itens abaixo e assinale o correto:

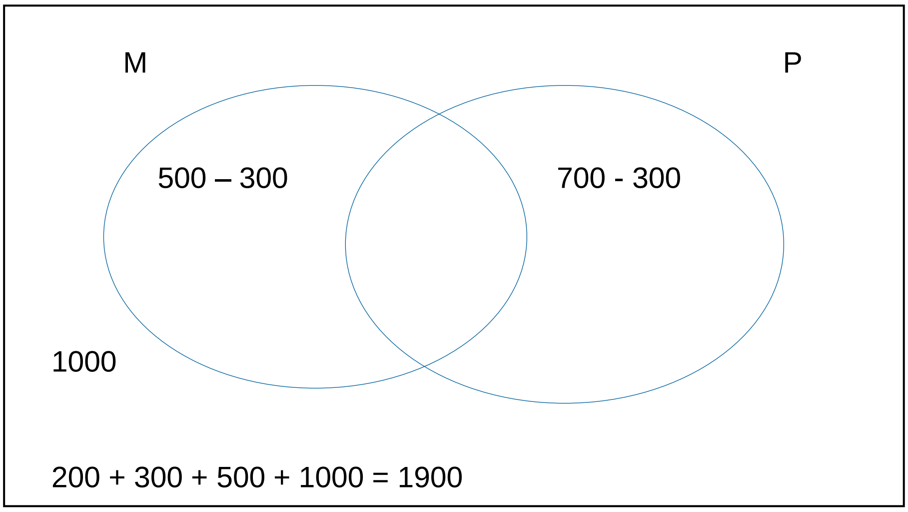
a) (A∩B) U C = {a,b,c,d,e}

b) (A U C) ∩ B = {b,d)}

c) (B ∩ C) U A = {a,b,c,d,e,f}

d) A U (B U C) = { }

1. É necessário lembrar que todas as vezes que alguém gosta de duas ou mais coisas ao mesmo tempo, usaremos a noção de diagrama para a sua resolução.



2 . Observe que o símbolo ∪ (união) indica que todos os elementos são importantes e utilizados na formação deste conjunto e o símbolo ∩ (intersecção) utiliza-se apenas dos elementos comuns aos dois conjuntos, ou seja, PRECISA PERTENCER ao conjunto M e N ao MESMO TEMPO. De posse desta informação iremos observar o conjunto M ∩ N = {1, 2,6} que nos mostra os elementos que se repetem (comuns) nestes conjuntos. Então podemos ter certeza que os números 1, 2 e 6 já pertencem obrigatoriamente ao conjunto N. Observando ainda o conjunto M ∪ N = {1, 2, 3, 4, 6} e o conjunto M = { 1, 2, 3, 4, 6} percebemos que, ao tirarmos os elementos comuns {1, 2, 6} do conjunto união sobram apenas os elementos 3 e 4 que já fazem parte do conjunto M logo podemos concluir que os únicos elementos que podem pertencer ao conjunto N, com certeza são os que fazem parte (neste caso e não como regra) dos elementos da intersecção por isto a resposta certa é a letra c.

3 . Neste tipo de questão teremos que resolver todas as letras para perceber qual destas é a correta. Lembre-se, primeiro resolve-se a operação dos parênteses e só depois a outra operação. Dessa forma vamos concluir que a afirmativa correta é a letra c.

1ª ATIVIDADE DE FIXAÇÃO

1) Se A = {2, 4, 6, 8} e B = {0, 3, 5, 8}, podemos afirmar que:

a) (A ∩B) = { }
b) A U B = A
c) B – A = {2, 4, 6 }
d) (A ∩B) U (A- B) = A

2) Sendo C = {d, b, c } e V ={a, e, i, o, u} , então [C – (C∩V)] ∩[(V U C) - V] é o conjunto:

a) C
b) V
c) C∩V
d) C U V

3) São dados os conjuntos: C ={x ∈ N/ 3 <x< 10}, G = ={x ∈ Z/ -3 <x< 6}, se S = C∩G então números de subconjuntos de S é igual a:

a) 16
b) 4
c) 32
d) 2

4) Se A e B são dois conjuntos não vazios tais que:

A U B = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}
A –B = {1, 3, 6, 7}
B – A = {4, 8}

Então o {A ∩ B} U $\complement_B^A$ é o conjunto:

a) Ø
b) {4}
c) {2, 4, 5, 8}
d) {7, 8}

5) Dados os conjuntos A = {1, 2, 3, 4, 5}, B = {4, 5, 6, 7}, C – A = {7, 8, 9}, C – B = {3, 8, 9} e A ∩ B ∩ C = {4}, o número subconjuntos formados pelo conjunto C é:

a) 6
b) 5
c) 16
d) 32

6) Assinale a alternativa correta:

a) {1} ∈ {1,2}

b) $1 \subset \{1,2\}$
c) $\{1\} \subset \{\{1\},\{2\}\}$
d) $\{1\} \in \{\{1\},\{2\}\}$

7) São dados os seguintes conjuntos:
A = $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 64 \; e \; 3x = 6\}$
B = $\{x \in \mathbb{R} \mid x + 10 = 10\}$
C = $\{x \in \mathbb{R} \mid x^4 < 0 \}$
D = $\{x \in \mathbb{R} \mid 0x = 5\}$
Quais desses conjuntos são vazios:
a) A e C
b) B e C
c) A, C e D
d) B, C e D

8) Analise as afirmações abaixo:
(20) $A \cup B = A \cap B \Leftrightarrow A = B$
(10) $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$
(5) $A \subset B \subset C \subset D \Rightarrow A \cap B = A, B \cap D = B \; e \; A \cap D = A$

A soma das alternativas verdadeiras é igual a:
a) 30
b) 5
c) 35
d) 15

9) Em uma universidade 80% dos estudantes leem o jornal A e 60% o jornal B. Sabendo eu todo aluno é leitor de pelo menos um dos jornais, qual o percentual de alunos que leem ambos?
a) 55%
b) 45%
c) 40%
d) 35%

10) Sabendo-se que A e B são conjuntos não vazios com 90 e 50 elementos respectivamente, e que A ∩ B possui 30 elementos. Assim o número de elementos do conjunto A U B é igual a:
a) 100
b) 40
c) 140
d) 110

GABARITO

1	D
2	A
3	B
4	C
5	D
6	D
7	C
8	C
9	C
10	D

REFERÊNCIAS

DANTE, Luiz Roberto. Matemática: contexto e aplicações. Vol. Único. Editora Ática, 2009.

YOUSSEF, Antônio N., Soares, Elizabeth, Fernandez, Vicente Paz. **Matemática** –Vol. Único.1ªEdição. Ed. Scipione. São Paulo. 2011

PAIVA, Manoel. **Matemática** –Vol. Único.1ªEdição. Ed. Moderna. São Paulo. 2005

MÓDULO II

UNIDADE I - EQUAÇÕES DE 1º GRAU

Objetivos

- Compreender a importância da verificação do resultado encontrado na resolução de uma equação de 1º grau;
- Reconhecer uma equação algébrica de 1º grau

INTRODUÇÃO

Para resolver um problema matemático, quase sempre devemos transformar uma sentença apresentada com palavras em uma sentença que esteja escrita em linguagem matemática. Esta é a parte mais importante e talvez seja a mais difícil da Matemática. E isto é mais comum do que imaginamos, ou seja, elaboramos sentenças matemáticas sem perceber.

SENTENÇA COM PALAVRAS	SENTENÇA MATEMÁTICA
2 melancias + 2Kg = 14Kg	$2x + 2 = 14$

Normalmente aparecem letras conhecidas como variáveis ou incógnitas. A partir daqui, a Matemática se posiciona perante diferentes situações e será necessário conhecer o valor de algo desconhecido, que é o objetivo do estudo de equações.

OUTRO EXEMPLO:

A soma das idades de André e Carlos é 22 anos. Descubra as idades de cada um deles, sabendo-se que André é 4 anos mais novo do que Carlos.

Solução: Primeiro passamos o problema para a linguagem matemática. Vamos tomar a letra c para a idade de Carlos e a letra a para a idade de André, logo $a=c-4$. Assim:

$c + a = 22$

$c + (c - 4) = 22$

$2c - 4 = 22$

$2c - 4 + 4 = 22 + 4$

$2c = 26$

$c = 13$ Resposta: Carlos tem 13 anos e André tem 13-4=9 anos.

DEFINIÇÃO

"Em matemática, uma **equação** é uma afirmação que estabelece uma igualdade entre duas expressões matemáticas."

A sentença matemática $2x + 4 = 9$ é uma sentença matemática aberta, expressa por uma igualdade. Esse tipo de sentença matemática recebe o nome de ***equação***. Toda equação possui 2 membros separados pelo sinal de igualdade ***(=)***.

$$\underbrace{2x + 4}_{1^{\text{o}}\text{ membro}} = \underbrace{9}_{2^{\text{o}}\text{ membro}}$$

Cada membro é composto por um ou mais termos.

De modo geral:

Chama-se equação de 1º grau com uma variável toda equação que pode ser reduzida à forma $ax + b = 0$, onde a e b são números reais quaisquer, com $a \neq 0$ e *x* é a variável ou incógnita.

RESOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DO 1º GRAU

- **Método Prático**:

Observe a resolução dos exemplos abaixo:

a) $2x = 12$

$x = \frac{12}{2}$

$x = 6$ $\qquad$ $V = \{6\}$

b) $2x + 7 = 13$

$2x = 13 - 7$

$2x = 6$

$x = \frac{6}{2}$

$x = 3$ $\qquad$ $V = \{3\}$

Numa equação é necessário separar os termos em x, geralmente colocados no 1º membro, dos termos que não apresentam à variável, trocando o "***sinal***" dos termos que mudam de um membro para outro.

c) $6x + 8 = 4x$

$6x - 4x = -8$

$2x = -8$

$x = -\frac{8}{2}$

$x = -4$ $\qquad$ $V = \{-4\}$

d) $5x + 3 = 15 + 8x$

$5x - 8x = 15 - 3$

$-3x = 12$ $\quad$ **(-1)**

$3x = -12$

$x = \frac{-12}{3}$

$x = -4$ $\qquad$ $V = \{-4\}$

Quando o coeficiente da variável for negativo, podemos multiplicar ambos os membros da equação por -1

e) $2(x + 1) + 3 = 3(x + 2) + 2$
$2x + 2 + 3 = 3x + 6 + 2$
$2x - 3x = 6 + 2 - 2 - 3$
$-x = 6 - 3$
$-x = 3 \quad (-1)$
$x = -3 \qquad V = \{-3\}$

Nessa equação, eliminamos os parênteses aplicando a ***propriedade distributiva*** da multiplicação, isto é, cada termo dos parênteses é multiplicado pelo número que vem antes dele.

f) $\frac{4x}{3} + 2 = \frac{5x}{2} - \frac{3}{2}$

$\frac{8x+12}{6} = \frac{15x-9}{6}$

Cancelamos os denominadores e
Conservamos os numeradores
$8x + 12 = 15x - 9$
$8x - 15x = -9 - 12$
$-7x = -21 \quad (-1)$
$7x = 21$
$x = \frac{21}{7}$
$x = 3 \qquad V = \{3\}$

Será necessário fazer o mmc (3,2) antes de resolver a equação.

3,2	2	basta multiplicar
3,1	3	os fatores
1,1	6	

mmc(3,2) = 6

ATIVIDADE DE FIXAÇÃO

1. A população de uma cidade A é o triplo da população da cidade B. Se as duas cidades juntas têm uma população de 100.000 habitantes, quantos habitantes tem a cidade B?

2. Uma casa com 260m^2 de área construída possui 3 quartos de mesmo tamanho. Qual é a área de cada quarto, se as outras dependências da casa ocupam 140m^2?

3. Resolver as equações

a) $2x + 4 = 10$

b) $5k - 12 = 20$

c) $2y + 15 - y = 22$

d) $9h + 2 = 16 + 2h$

e) $18x - 43 = 65$

f) $23x - 16 = 14 - 17x$

g) $10y - 5 (1 + y) = 3 (2y - 2) - 20$

h) $x(x + 4) + x(x + 2) = 2x^2 + 12$

i) $(x - 5)/10 + (1 - 2x)/5 = (3-x)/4$

j) $4x (x + 6) - x^2 = 5x^2$

GABARITO

1ª ATIVIDADE DE FIXAÇÃO

1) 75.000 habitantes.

2) $40m^2$

3) a) 3 b) 6,4 c) 7 d) 2 e) 6 f) ¾ g) 21 h) 2 i) -21 j) 12

MÓDULO III

UNIDADE I - INEQUAÇÕES DE 1º GRAU

Objetivos

- Identificar uma inequação do 1º grau;
- Resolver uma inequação do 1º grau.

DEFINIÇÃO

É toda sentença aberta expressa por uma desigualdade. As expressões são separadas pelos sinais:

$<$	**Menor**
$>$	**Maior**
$\leq$	**Menor ou igual**
$\geq$	**Maior ou igual**

Nas desigualdades, o objetivo é obter um conjunto de todos os possíveis valores que podem assumir uma ou mais incógnitas na equação proposta.

Exemplos

a) $3x + 10 < 200$

b) $2x + 5 > 50$

Assim como na equação, ela também possui 2 membros:

$$\underbrace{3x - 2}_{\textbf{1º membro}} > \underbrace{8}_{\textbf{2º membro}}$$

RESOLUÇÃO:

É necessário isolar a variável em um dos membros da inequação, aplicando as mesmas propriedades válidas para as equações.

Atenção:

Quando multiplicarmos a inequação por (-1), ***devemos inverter o sinal da desigualdade.***

Exemplos:

a) $x + 3 < 6$, sendo $U = \mathbb{N}$

$x < 6 - 3$

$x < 3$ $\qquad V = \{ x \in \mathbb{N} / x < 3\}$

b) $5x + 6 \leq 2x + 15$, sendo $U = Z$

$5x - 2x \leq 15 - 6$

$3x \leq 9$

$x \leq \frac{9}{3}$

$x \leq 3$ $\qquad V = \{ x \in Z / x \leq 3 \}$

c) $2(x - 3) \leq 2(2x - 1)$, sendo $U = Q$

$2x - 6 \leq 4x - 2$

$2x - 4x \leq -2 + 6$

$-2x \leq 4$ (-1)

$2x \geq -4$

$x \geq \frac{-4}{2}$

$x \geq -2$ $\qquad V = \{x \in Q / x \geq -2\}$

Para eliminar os parênteses da equação será necessário aplicar a ***propriedade distributiva*** da multiplicação e depois resolver a inequação obtida.

ATIVIDADE DE FIXAÇÃO

Resolva as inequações abaixo:

a) $2x + 1 \leq x + 6$

b) $2 - 3x \geq x + 14$

c) $2(x + 3) > 3(1 - x)$

d) $3(1 - 2x) < 2(x + 1) + x - 7$

e) $\frac{x}{3} - \frac{(x+1)}{2} < \frac{(1-x)}{4}$

GABARITO

a) $x \leq 5$

b) $x \leq -3$

c) $x > -\frac{3}{5}$

d) $x > \frac{8}{9}$

e) $x < 9$

MÓDULO IV

UNIDADE I - SISTEMA DE EQUAÇÕES DE 1º GRAU COM DUAS VARIÁVEIS

Objetivos

- Equacionar e resolver problemas com auxílio das equações de 1º grau
- Resolver sistemas de 2 equações simultâneas do 1º grau.

DEFINIÇÃO

Equações do tipo 3***x + 2y = 6***; x ***+ y = 8***; ***2x –y = - 3***, são equações do 1º grau com 2 variáveis. Quando duas equações desse tipo estão relacionadas entre si, elas formam um sistema.

Ex.: $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$

RESOLUÇÃO:

Existem 3 métodos. Aqui, vamos fixar nosso estudo em dois deles. Observe:

1º - Método da Substituição:

Isolamos uma das variáveis de uma equação e substituímos seu valor na mesma variável da outra equação. Observe o exemplo:

Ex.: Resolver o sistema, sendo U = Q

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 4 \end{cases}$$

1º passo – escolher uma das equações e isolar uma das incógnitas no primeiro membro.

$x + y = 10 \Rightarrow x = 10 - y$

2º passo – Substituir o valor da variável ***x*** obtido no 1º passo, na segunda equação

$x - y = 4$
$(10 - y) - y = 4$

3º passo – Resolver a equação para encontrar o valor de y, para isso, elimine o parêntese

$10 - y - y = 4$

$-y - y = 4 - 10$

$-2y = -6 \; ^{(-1)}$

$2y = 6$

$y = \frac{6}{2}$

$y = 3$

4º passo - Substituir o valor de ***y*** encontrado em qualquer equação do sistema para encontrar o valor de ***x***

$x + y = 10$	ou	$x - y = 4$
$x + 3 = 10$		$x - 3 = 4$
$x = 10 - 3$		$x = 4 + 3$
$x = 7$		$x = 7$

A solução será o par ordenado (7,3) $\longrightarrow$ S = {(7,3)}

ATIVIDADE DE FIXAÇÃO

Resolva os sistemas abaixo:

a) $\begin{cases} x - y = 2 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - 3y = -15 \\ 2x + y = 11 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x + y = 5 \end{cases}$

$x - 3y = 6$

GABARITO

a) (4,2)
b) (4,1)
c) $\left(\frac{18}{7}, \frac{41}{7}\right)$
d) (3, -1)

2º - MÉTODO DA ADIÇÃO:

Para resolver um sistema de equações pelo método da adição, você deve primeiramente observar os coeficientes de uma das incógnitas nas duas equações.

- **1º caso**: Se os dois coeficientes forem simétricos (+ 5, - 5, por exemplo)

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$$

A incógnita ***y*** tem coeficiente **1** na primeira equação e -**1** na segunda equação. Como são **simétricos** somamos as duas equações.

$$\begin{cases} x \cancel{+} y = 8 \\ 2x \cancel{-} y = 7 \end{cases}$$

$3x = 15$

$x = \frac{15}{3}$

Encontrado o valor da incógnita substituir em qualquer equação do sistema dado.

$x = 5$

$x + y = 8$	ou	$2x - y = 7$
$5 + y = 8$		$2.5 - y = 7$
$y = 8 - 5$		$-y = 7 - 10$
$y = 3$		$-y = -3^{(-1)}$
		$y = 3$

Logo a solução do sistema é o par ordenado (5,3), ou seja, S = {(5,3)}

- **2º caso**: Se os coeficientes de uma das incógnitas são iguais

$$\begin{cases} 2x - 3y = \ \ 18 \\ 2x - 5y = -\ 14 \end{cases}$$

Nas duas equações a incógnita x tem coeficiente igual a 2. Para resolver o sistema, basta multiplicar uma das equações por -1 para que o coeficiente + 2 passe para -2. Observe:

$$(-1)\begin{cases} 2x + 3y = 18 \\ 2x - 5y = -14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\cancel{2x} - 3y = -18 \\ \cancel{2x} - 5y = -14 \end{cases}$$

Agora, como no 1º caso somamos as duas equações

$$-\ 8y = -\ 32 \ ^{(-1)}$$
$$8y = 32$$
$$y = \frac{32}{8}$$
$$y = 4$$

Para encontrar o valor de x, basta substituir o valor de y ***em qualquer equação*** do sistema dado:

$2x + 3y = 18$

$2x + 3.4 = 18$

$2x + 12 = 18$

$2x = 18 - 12$

$2x = 6$

$x = \frac{6}{3}$

$x = 3$

S = {(3,4)}

- **3º caso**: Os coeficientes são diferentes e não são simétricos

Atenção:

Simétricos = são números que possuem o mesmo módulo. Pode-se dizer também que são números que têm o mesmo valor absoluto e sinais contrários.

Exemplos:

a) + 5 e - 5 b) - 10 e +10

c) - 235 e + 235 d) - a e + a

Termos ou números simétricos quando adicionados se anulam, ou seja, tem soma igual a zero

Neste caso você deverá multiplicar as duas equações por números reais tais que tornem os coeficientes ***de uma das incógnitas (x ou y)*** simétricos.

2x + 3y = 13

4x – 5y =

$$\begin{cases} 2x + 3y = 13 \Longrightarrow \text{multiplicar por } 4 \\ 4x - 5y = 15 \Longrightarrow \text{multiplicar por } -2 \end{cases}$$

assim vamos cancelar a incógnita **X**

$$\begin{cases} \cancel{8}x + 12y = 52 \\ -\cancel{8}x + 10y = -30 \end{cases}$$

$$22y = 22$$

$$y = \frac{22}{22}$$

$$y = 1$$

Como + 8 e - 8 são simétricos, agora basta somar as equações como nos casos anteriores.

Para encontrar o valor de ***x***, basta substituir o valor do ***y em qualquer equação*** do sistema dado.

$2x + 3y = 13$

$2x + 3.1 = 13$

$2x = 13 – 3$

$2x = 10$

$S = \{(5,1)\}$

$x = \frac{10}{2}$

x = 5

ATIVIDADE DE FIXAÇÃO

Resolva os sistemas abaixo, sendo U = Q

a) $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x - y = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 12 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 3y = 14 \\ 5x + 3y = 26 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x - y = 2 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 5x - y = -5 \\ 2x + 3y = -19 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 3 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x - 3y = -19 \\ 2x + y = 11 \end{cases}$

h) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - 3y = 6 \end{cases}$

GABARITO

a) (3,1)
b) (4,2)
e) (7,5)
c) (4,2)
d) (-2,-5)
e) (4,1)
f) (2,7)
g) (3,1)

MÓDULO V

UNIDADE I - EQUAÇÃO DE 2º GRAU

Objetivos

- Identificar uma equação do 2º grau;
- Reconhecer que o discriminante de uma equação do 2º grau determina o número e o tipo de raízes da equação do 2º grau;
- Resolver equações completas do 2º grau utilizando a fórmula de Bháskara.

DEFINIÇÃO

Chama-se equação do 2º grau na variável x, toda expressão matemática da forma $ax^2 + bx + c = 0$; onde a, b e c são números reais quaisquer, sendo que **a não pode ser zero. *(a $\neq$ 0)***

Atenção:

- O número ***a*** é o coeficiente de x^2
- O número ***b*** é o coeficiente de x
- O número ***c*** é o termo independente.

Exemplos:

a) $x^2 + 6x - 6 = 0 \begin{cases} a = 1 \\ b = 6 \\ c = -6 \end{cases}$

c) $2x^2 - 10x + 8 = 0 \begin{cases} a = 2 \\ b = -10 \\ c = 8 \end{cases}$

b) $x^2 + 4x - 5 = 0 \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \\ c = -5 \end{cases}$

d) $x^2 - 4x = 0 \begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = 0 \end{cases}$

e) $x^2 - 9 = 0 \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = -9 \end{cases}$

As equações apresentadas nas letras **d** e **e** acima são chamadas equações do 2º grau incompletas, porque falta um dos coeficientes.

RAÍZES DE UMA EQUAÇÃO DO 2º GRAU

Uma raiz (ou solução) de uma equação do 2º grau é um número que, se colocado no lugar do **x**, torna a igualdade verdadeira.

Por exemplo, considere a equação $x^2 - 5x + 6 = 0$. O que acontece se substituirmos a letra **x** pelo número 1?

Vejamos: $x^2 - 5x + 6 = 0$

$1^2 - 5.1 + 6 = 0$

$1 - 5 + 6 = 0$

$2 = 0$ (**falso**) $\Rightarrow$ logo x = 1 não é raiz da equação

Agora, veja o que acontece se substituirmos a letra **x** pelo número 2

$x^2 - 5x + 6 = 0$

$2^2 - 5.2 + 6 = 0$

$4 - 10 + 6 = 0$

$0 = 0$ (**verdadeiro**) $\Rightarrow$ logo x = 2 é raiz da equação.

RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE 2º GRAU

- **Equações Incompletas:**

  1º caso: Equação da forma $ax^2 + bx = 0$ (c = 0)

Para resolvê-la devemos utilizar um caso de fatoração – colocar o fator comum em evidência.

Observe o exemplo:

a) $x^2 - 5x = 0$ ⇒ colocando o x em evidência transformaremos a equação

$x(x-5) = 0$ num produto de fatores. Sabendo que o produto de dois será zero se, e somente se, um dos dois fatores for zero.

$\boxed{x = 0}$ ou $x - 5 = 0$

$\boxed{x = 5}$ $V = \{0,5\}$

b) $5x^2 - 2x = 0$

$x(5x - 2) = 0$

$\mathbf{x = 0}$ ou $5x - 2 = 0$

$5x = 2$

$\mathbf{x} = \frac{2}{5}$ $V = \left\{0, \frac{2}{5}\right\}$

c) $\frac{1}{x} - 3 = x + \frac{2}{2x}$ $x \neq 0$

Antes de resolver esta equação é necessário tirar o mmc dos denominadores:
mmc(x,2x) = 2x

$$\frac{2-6x}{\cancel{2x}} = \frac{2x^2+2}{\cancel{2x}}$$

$2 - 6x = 2x^2 + 2$

$\cancel{2} - 6x - 2x^2 \cancel{- 2} = 0$

$-2x^2 - 6x = 0$ (-1)

Como os denominadores ficaram iguais antes e depois da igualdade, podemos cancelar e resolver a equação dos denominadores.

$2x^2 + 6x = 0$

$x\,(2x + 6) = 0$

x = 0 ou $2x + 6 = 0$

$2x = -6$

$x = \dfrac{-6}{2}$

x = -3 V = { - 3}

Atenção:

O zero foi excluído no conjunto solução dessa equação porque no enunciado dizia $x \neq 0$

2º caso: Equação da forma $ax^2 + c = 0$ (b = 0)

Para resolver uma equação dessa forma vamos separar os termos, em um membro ficará o termo com a variável no outro o termo sem a variável, lembrar se trocar de membro deverá trocar o **"sinal"** dos termos.

Exemplos:

a) $7x^2 - 28 = 0$

$7x^2 = 28$

$x^2 = \dfrac{28}{7}$ $S = \{\pm 2\}$

$x^2 = 4$

$x = \pm\sqrt{4}$

$x = \pm 2$

b) $3x^2 - 48 = 0$

$3x^2 = 48$

$x^2 = \dfrac{48}{3}$

$x^2 = 16$ $S = \{\pm 4\}$

$x = \pm\sqrt{16}$

$x = \pm 4$

Atenção:

Numa equação da forma $ax^2 + c = 0$ as raízes serão simétricas.

c) $4x^2 - 5 = -1$

$4x^2 = -1 + 5$

$4x^2 = 4$

$x^2 = \dfrac{4}{4}$

$x^2 = 1$
$x = \pm 1$ $S = \{\pm 1\}$

d) $3x^2 + 27 = 0$
$3x^2 = -27$
$x^2 = -\frac{27}{3}$
$x^2 = -9$
$x = \pm\sqrt{-9}$ $\Rightarrow$ como não existe raiz de índice par de um número negativo essa equação não terá solução.
$S = \{\ \}$ ou $S = \emptyset$

ATIVIDADE DE FIXAÇÃO

Resolva as equações, considerando U = R

a) $x^2 - 2x = 0$
b) $x^2 + 2x = 0$
c) $3x^2 + 5x = 0$
d) $x^2 - 36 = 0$
e) $-3x^2 + 12 = 0$
f) $x^2 + 16 = 0$
g) $-10x^2 + 20 = 0$

GABARITO

a) $S = \{0,2\}$
b) $S = \{0,-2\}$
c) $S = \{0, -\frac{5}{3}\}$

d) S = {-6,+6}
e) S = {-2, 2}
f) S = { }
g) S = { - $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$ }

EQUAÇÕES COMPLETAS

É toda equação da forma $ax^2 + bx + c = 0$, com a, b e c números reais quaisquer e a $\neq$ 0. Para resolvê-la é necessário utilizar a fórmula de Bháskara:

$$\boldsymbol{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

A expressão ***b^2 – 4ac*** é muito importante na resolução dessa equação porque ela "***discrimina***" o número de soluções da equação, daí ser chamada de discriminante da equação. Representado pela letra grega Δ.

Δ ***= b^2 – 4ac***

Substituindo na fórmula de Bháskara temos: $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

Com esta fórmula podemos resolver qualquer equação do 2º grau.

Observe os exemplos:

Resolva as equações do 2º grau ou equações quadráticas abaixo:

a) $x^2 - 10x + 9 = 0 \left\{ a = 1,\ b = -10 \text{ e } c = 9 \right.$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

$\Delta = (-10)^2 - 4.1.9$

$x = \dfrac{-(-10) \pm \sqrt{64}}{2.1}$

$\Delta = 100 - 36$

$x = \dfrac{10 \pm 8}{2}$

$\Delta = 64 \Rightarrow \Delta > 0$

$\Updownarrow$

A equação possui duas raízes reais diferentes.

$x' = \dfrac{10+8}{2}$ $\Downarrow$ $x' = \dfrac{18}{2}$ $\Downarrow$ $x' = 9$

$x'' = \dfrac{10-8}{2}$ $\Downarrow$ $x'' = \dfrac{2}{2}$ $\Downarrow$ $x'' = 1$

S = { 1,9}

b) $x^2 - 6x + 9 = 0 \left\{ \; a = 1, b = -6 \text{ e } c = 9 \right.$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-6)^2 - 4.1.9$

$\Delta = 36 - 36$

$\Delta = 0$

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

$x = -\dfrac{(-6) \pm \sqrt{0}}{2.1}$

$x = \dfrac{6 \pm 0}{2}$

$x' = x'' = \dfrac{6}{2}$

$x' = x'' = 3$ $\qquad$ $S = \{3\}$

A equação possui duas raízes reais iguais ou uma raiz real

$3x^2 - 5x + 3 = 0 \quad a = 3; \; b = -5 \text{ e } c = 3$

$\Delta = b^2 - 4ac$
$\Delta = (-5)^2 - 4.3.3$
$\Delta = 25 - 36$
$\Delta = -11 \Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow$ a equação não possui raízes reais

$S = \{\ \}$ ou $S = \varnothing$

ATIVIDADE DE FIXAÇÃO

Resolva as equações completas do 2º grau abaixo:

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$
b) $4x^2 - 4x + 1 = 0$
c) $x^2 - 4x + 3 = 0$
d) $3x^2 - x - 2 = 0$
e) $2x^2 + 3x - 5 = 0$
f) $x^2 - 7x + 10 = 0$

GABARITO

a) S = {2,3}

b) S = $\{\frac{1}{2}\}$

c) S = {1,3}

d) S = $\{1, -\frac{2}{3}\}$

e) S = $\{1, -\frac{5}{2}\}$

f) S = {5,2}

MÓDULO VI

UNIDADE I - EXPRESSÕES ALGÉBRICAS

Objetivos

- Reconhecer uma expressão algébrica
- Determinar o valor numérico de uma expressão algébrica
- Efetuar operações com expressões algébricas: adição, subtração, multiplicação e divisão

DEFINIÇÃO

Expressão literal ou algébrica é a expressão matemática em que aparecem números e letras, ou somente letras.

Exemplos:

$x + y$; $2x^2 + \sqrt{y}$; $x - \frac{3}{2} + \frac{y}{3}$; $a + 2b + 5$

Termo algébrico: a) $4x^3$ → 4 é o coeficiente numérico; → x^3 é a parte literal

b) $\sqrt{21}\,x^3y^2$ → $\sqrt{21}$ é o coeficiente numérico; → x^3y^2 é a parte literal

Valor numérico de uma expressão algébrica

Chamamos valor numérico (VN) de uma expressão algébrica ao número que se obtém, quando substituímos as variáveis por valores reais.

Exemplos:

a) Dada a expressão $3x + 5$, obter o valor numérico para $x = 4$.
   $3x + 5=$
   $3.4 + 5=$
   $12 + 5 =$
   17

Termos semelhantes

Numa expressão numérica chamamos de termos semelhantes àqueles que apresentam a mesma ***parte literal***.

Exs.: a) $5x^3$ e $7x^3$

b) $2x^2y$ e $5x^2y$

Um conjunto de termos algébricos é chamado polinômio

Exs.: a) $3x + y$; b) $x^3 + 3xy + 3y^3$

OPERAÇÕES

1) Adição e Subtração:

Só podemos adicionar ou subtrair termos semelhantes.

1.1) Monômio com monômio:

a) $2xy + (-7xy) =$

$2xy - 7xy =$

$-5xy$ (fazemos a soma algébrica dos coeficientes e repetimos a parte literal)

b) $-3x^2 + (-5x^2) + 7x^2 = -3x^2 - 5x^2 + 7x^2 = -1x^2 = \mathbf{-x^2}$

c) $-5b^2 + \mathbf{4a} - 3b^2 - (\mathbf{-2a}) = -8b^2 + \mathbf{4a + 2a} = -8b^2 + 6a$

1.2) Polinômio com polinômio:

a) $(4x^2 - 6x - 1) + (2x^2 - x + 3) = \mathbf{4x^2} - 6x - 1 + \mathbf{2x^2} - x + 3 = \mathbf{6x^2} - 7x + 2$

- Basta retirar os termos dos parênteses e somar os ***termos semelhantes*** para obter o resultado final.
- Podemos também armar a operação como se faz com adição de números, colocando termos semelhantes debaixo de termos semelhantes.

- Observe:

$$\begin{array}{rl} & 4x^2 - 6x - 1 \\ + & \underline{2x^2 - x + 3} \\ & 6x^2 - 7x + 2 \end{array}$$

Atenção ao sinal

b) $(5x^2 - 6x + 1) - (2x^2 - x + 3) = 5x^2 - 6x + 1 - 2x^2 + x - 3 = 3x^2 - 5x - 2$

- Retire os termos dos parênteses observando que no segundo parênteses ***todos os termos precisam ter o sinal trocados***, depois basta fazer a soma algébrica dos termos semelhantes.
- Também podemos armar a operação como na adição, mas antes devemos ***trocar o sinal de todos os termos do segundo polinômio***. Observe:

$$\begin{array}{r} 5x^2 - 6x + 1 \\ \underline{-2x^2 + \quad x - 3} \\ 3x^2 - 5x - 2 \end{array}$$

2) Multiplicação:

Lembrete:

- Produto de potências da mesma base: repetir a base e somar os expoentes.

$x^2 . x^4 = x^{2+4} = x^6$

$y^5 . y . y^2 = y^{5+1+2} = y^8$

Para multiplicar termos algébricos é necessário aplicar a propriedade distributiva da multiplicação, multiplicando termo a termo. Observe os exemplos:

a) $(-12x^2) . (-2x^4) = 24x^{2+4} = \boldsymbol{24x^6}$
$(-12) . (-2)$
$x^2 . x^6$

b) $(-2x^2y) . (5x^3y^2z) = \boldsymbol{-10x^5y^3z}$
$(-2) . (5)$
$X^2. x^3$
$y . y^2$
z

c) $3x\,(5x - 2y) = \boldsymbol{15x^2 - 6xy}$

d) $\frac{3x}{4}(5x - \frac{1}{2}) = \frac{15x^2}{4} - \frac{3x}{8}$

e) $(2x + 5)\,(3x - 1) = 6x^2 - 2x + 15x - 5 = \boldsymbol{6x^2 + 13x - 5}$

f) $(2x^2 - 4x + 1)\,(2x - 1) = 4x^3 - 2x^2 - 8x^2 + 4x + 2x - 1 = 4x^3 - 10x^2 + 6x - 1$

Para efetuarmos a multiplicação de termos algébricos, calculamos o produto dos coeficientes numéricos e na parte literal aplicamos a propriedade do produto das potências da mesma base, quando possível.

3) Divisão:

Lembrete:

- Quociente de potências de mesma base: conserva-se a base e diminui o expoente.
  $y^5 : y^4 = y^{5-4} = y^1$ ou y
  $x^3 : x = x^{3-1} = x^2$

Para efetuarmos a divisão de termos algébricos, calculamos o quociente dos coeficientes numéricos e na parte literal aplicamos a propriedade da divisão das potências da mesma base, quando possível. Observe os exemplos:

a) $(-15x^3) : (3x) = -5x^2$
   $(-15) : (3)$
   $x^3 : x$

b) $(-9x^3y^2) : (3x^2y) = -3xy$
   $(-9) : (3)$
   $x^3 : x^2$
   $y^2 : y$

c) $(6b^3 - 4b^2 + 2b) : (-2b) = -3b^2 + 2b - 1$

d) $(12x^3 - 10x^2y + 4x^4z) : (-2x) = -6x^2 + 5xy - 2x^3z$

MÓDULO VII

UNIDADE I - PRODUTOS NOTÁVEIS

Objetivos

- Identificar os produtos notáveis e dominar suas regras práticas.
- Aplicar os produtos notáveis na resolução de atividades.

INTRODUÇÃO

- $(a + b)(a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 = \boldsymbol{a^2 + 2ab + b^2}$
- $(x + y)(x + Y) = x^2 + xy + xy + y^2 = \boldsymbol{x^2 + 2xy + y^2}$
- $(m + n)(m + n) = m^2 + mn + mn + n^2 = \boldsymbol{m^2 + 2mn + n^2}$

Ao observar as respostas você pode notar uma semelhança entre elas. Esses produtos aparecem com frequência na Matemática e naturalmente surgiram regras práticas para obtê-los. Esses produtos são chamados ***produtos notáveis***.

a) <u>Casos de produtos notáveis:</u>

1º caso: Quadrado da soma de dois termos:

⇒ Se $(a + b)(a + b) = (a + b)^2$ então:

$(a + b)^2 = a^2 + \underline{2ab} + b^2$ → quadrado do segundo termo

→ duas vezes o primeiro termo pelo segundo termo

↓ quadrado do primeiro termo.

- ***Regra Prática***:

> O quadrado da soma de dois termos é igual ao quadrado do primeiro termo, mais duas vezes o produto do primeiro termo pelo segundo mais o quadrado do segundo termo.

EXEMPLOS:

a) $(p + q)^2 = p^2 + 2.p.q + q^2 = \boldsymbol{p^2 + 2pq + q^2}$

b) $(3x + 1)^2 = (3x)^2 + 2.3x.1 + 1^2 = \boldsymbol{9x^2 + 6x + 1}$

c) $(3x + 5y)^2 = (3x)^2 + 2.3x.5y + (5y)^2 = \boldsymbol{9x^2 + 30xy + 25y^2}$

2º caso: <u>Quadrado da diferença de dois termos:</u>

Se $(a - b)(a - b) = (a - b)^2$ então segundo

$(a - b)^2 = a^2 - 2.a.b + b^2 = a^2 - \underline{2ab} + b^2$ → quadrado do segundo termo

→ Duas vezes o primeiro termo pelo

Quadrado do primeiro termo

- ***Regra prática:*** O quadrado da diferença de dois termos é igual ao quadrado do primeiro termo, menos duas vezes o produto do primeiro termo pelo segundo mais o quadrado do segundo termo.

EXEMPLOS:

a) $(p - q)^2 = p^2 - 2.p.q + q^2 = \boldsymbol{p^2 - 2pq + q^2}$

b) $(3x - 1)^2 = (3x)^2 - 2.3x.1 + 1^2 = \boldsymbol{9x^2 - 6x + 1}$

c) $(3x - 5y)^2 = (3x)^2 - 2.3x.5y + (5y)^2 = \boldsymbol{9x^2 - 30xy + 25y^2}$

d) $(ax^2 - b^3)^2 = (ax^2)^2 - 2.ax^2.b^3 + (b^3)^2 = a^2x^4 - 2ax^2b^3 + b^6 = \boldsymbol{a^2x^4 - 2ab^3x^2 + b^6}$

3º caso: <u>Produto da soma pela diferença de dois termos:</u>

Observe: **2º termo**

$(a + b)(a - b) = a^2 - \cancel{ab} + \cancel{ab} - b^2 = a^2 - b^2$ → quadrado do segundo termo

1º termo → Quadrado do primeiro termo

Regra prática: O produto da soma pela diferença de dois termos é igual ao quadrado do 1º termo menos o quadrado do 2º termo.

EXEMPLOS:

a) $(x + 3)(x - 3) = (x)^2 - (3)^2 = \boldsymbol{x^2 - 9}$

b) $(2x - 5y)(2x + 5y) = (2x)^2 - (5y)^2 = \boldsymbol{4x^2 - 25y^2}$

ATIVIDADE DE FIXAÇÃO

Aplique as regras de produtos notáveis:

a) $(a + 7)(a - 7) =$
b) $(3y + 2)^2 =$
c) $(2 + c)^2 =$
d) $(x - 10)^2 =$
e) $(2x^2y - 3x)^2 =$
f) $(5ab + 3b)^2 =$
g) $(3b^2 - a)(3b^2 + a) =$
h) $(1 + ax)(1 - ax) =$

GABARITO

a) $a^2 - 49$
b) $9y^2 + 12y + 4$
c) $4 + 4c + c^2$
d) $x^2 - 20x + 100$
e) $4x^4y^2 - 12x^3y + 9x^2$
f) $25a^2b^2 + 30ab^2 + 9b^2$
g) $9b^4 - a^2$
h) $1 - a^2x^2$

MÓDULO VIII

UNIDADE I - FATORAÇÃO

Objetivos

- Identificar e dominar os principais casos de fatoração

INTRODUÇÃO

O que é fatorar? Fatorar é decompor um número em um produto de dois ou mais fatores primos.

> ***Atenção***:
>
> Número primo só possui dois divisores o um e ele mesmo.

EXEMPLOS:

- $$\begin{array}{r|l} 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{l}2\\2\\5\end{array}}\right\} \text{fatores primos} = 2^2 . 5$$

- $$\begin{array}{r|l} 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{l}2\\2\\2\end{array}}\right\} \text{fatores primos} = 2^3$$

Um polinômio também pode ser fatorado, observe alguns casos:

1º caso - Fator comum em evidência:

1) $ac + ab =$

- Observe que cada termo dessa expressão tem o ***a*** como fator comum
- Colocamos esse fator em evidência $\longrightarrow$ a (   )
- Para obter a parte interna desse parêntese dividimos cada fator do polinômio dado por ***a*** $\quad \cancel{a}c + \cancel{a}b = \boldsymbol{a (b + c)} \longrightarrow$ o polinômio está fatorado.

EXEMPLOS:

a) $\cancel{2}x + \cancel{2}y = \boldsymbol{2\,(x + y)}$

b) $\underbrace{9x}_{\cancel{3}.3.x} + \cancel{3}y = \boldsymbol{3\,(3x + y)}$ → Atenção o fator comum pode estar no coeficiente de cada termo

c) $3\cancel{a} - 5\cancel{a}b = \boldsymbol{a\,(3 - 5b)}$

d) $4a - 6ab = \boldsymbol{2a\,(2 - 3b)}$ → Os fatores comuns podem estar no coeficiente e na parte literal de cada termo

$4a$ ↓ $\cancel{2}.2.\cancel{a}$ $\qquad 6ab$ → $\cancel{2}.3.\cancel{a}.b$

2º caso – Agrupamento:

Esse processo é utilizado quando expressão não possui fator comum em todos os seus termos, mas, agrupando-os, podemos fatorar a expressão pelo caso do fator comum em evidência.

Observe os exemplos:

a) $\underbrace{ab + ax} + \underbrace{bx + x^2} = a(b + x) + x(b + x) = \boldsymbol{(b + x)\,(a + x)}$

b) $\underbrace{3a - 6b} - \underbrace{ax - 2bx} = \underbrace{3a - 2.3.b} - \underbrace{ax - 2bx} = 3(a - 2b) + x(a - 2b) = \boldsymbol{(a - 2b)\,(3 + x)}$

- am + an + bm + bn
  a**(m+n)** + b**(m+n)**
  (m+ n) (a + b)

Dica:

Ao agrupar os termos e após colocar em evidência o fator comum, observe se os parênteses obtidos ficaram iguais, isto significa que a fatoração está correta.

3º caso – Aplicação dos produtos notáveis na fatoração

3.1 – Trinômio do quadrado perfeito:

Será transformado no quadrado da soma ou da diferença entre 2 termos

- $a^2 \quad + \quad 2ab \quad + \quad b^2 \quad = \quad (a + b)^2$

1º termo   2º termo

possuem raiz quadrada exata

Utilizado para identificar qual sinal será utilizado entre os termos.

Observe a regra:

$$\mathbf{a^2 + 2ab + b^2}$$

raiz quadrada **a**   raiz quadrada **b**

positivo

2.a.b

$(a + b)^2$

Assim, $\mathbf{a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2}$

EXEMPLOS:

a) $x^2 + 2xy + y^2 = \boldsymbol{(x + y)^2}$

$x \qquad y$

$2.x.y$

b) $4a^2 + 12ab + 9b^2 = \boldsymbol{(2a + 3b)^2}$

$2a \qquad 3b$

$2.2a.3b$

c) $x^2 + 4x + 1 =$

$x \qquad 1$

$2.x.1$ → termos diferentes logo não é trinômio do quadrado perfeito

d) $100 - 20a + a^2 = (10 - a)^2$

10 a

$2.10.a$

e) $y^2 - 8y + 16 = (y - 4)^2$

y 4

$2.y.4$

3.2 – Diferença de dois quadrados:

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

Observe os exemplos:

a) $9x^2 - 4 =$

raiz quadrada   raiz quadrada

$3x$ 2

$(3x + 2)(3x - 2)$

b) $x^4 - y^4 =$

x^2 $y^2 \longrightarrow (x^2 + y^2)(x^2 - y^2)$

c) $\frac{4m^2}{9} - 81 = \left(\frac{2m}{3} + 9\right)\left(\frac{2m}{3} - 3\right)$

$\frac{2m}{3}$ 9

ATIVIDADE DE FIXAÇÃO

1) Fatores as expressões, colocando em evidência o fator comum:

a) $2x + 4=$
b) $3y – 6=$
c) $6x + 3y=$
d) $4a – 2b=$
e) $4x^2 – 4x=$
f) $3y^2 + 3y=$
g) $ax^2 – a=$
h) $a^2 – a + ab=$
i) $6a^2b + 12a =$
j) $4x^2 + 8xy – 12x =$

2) Fatore as expressões por agrupamento:
a) $am + an + bm + bn =$
b) $8x + 4 + 2x^2 + x =$
c) $15 + 5a – 3b – ab =$
d) $4mx^3 – 4m – 6x^4 + 6x =$
e) $18ab^3 + 3b^2c + 6a^2b + ac =$
f) $2x^3 + 3x^2 – 3x^2y – 2x^3y =$

3) Utilize a diferença de dois quadrados para fatorar as expressões abaixo:

a) $9x^2 – 4 =$
b) $16z^2 – b^2y^2 =$
c) $9 – 64y^2 =$
d) $1 – 100b^4c^6=$
e) $81 – 4x^2$
f) $\frac{4m^2}{25} - 121 =$

4) Fatores os trinômios dos quadrados perfeitos abaixo:

a) $4 + 4c + c^2 =$
b) $25z^2 + v^2 + 10zv =$
c) $16 + 40x^2 + 25x^4 =$
d) $9y^2 – 12yz + 4z^2 =$
e) $y^2 – 8y + 16 =$
f) $100 – 20a + a^2 =$

GABARITO

1-

a) $2(x+2)$
b) $3(y-2)$
c) $3(2x+y)$
d) $2(2a-b)$
e) $4x(x-1)$
f) $3y(y+1)$
g) $a(x^2-1)$
h) $a(a-1+b)$
i) $6a(ab+2)$
j) $4x(x+2y-3)$

2-

a) $(a+b)(m+n)$
b) $(2x+1)(4+x)$
c) $(5-b)(3+a)$
d) $(4m-6x)(x^3-1)$
e) $(3b^2+a)(6ab+c)$
f) $(x^2-x^2y)(2x+3)$

3-

a) $(3x+2)(3x-2)$
b) $(4z+by)(4z-by)$
c) $(3+8y)(3-8y)$
d) $(1+10b^2c^3)(1-10b^2c^3)$
e) $(9+2x)(9-2x)$
f) $\left(\frac{2m}{5}+11\right)\left(\frac{2m}{5}-11\right)$

4-

a) $(2+c)^2$
b) $(5z+v)^2$
c) $(4+5x^2)^2$
d) $(3y-2z)^2$
e) $(y-4)^2$
f) $(10-a)^2$

REFERENCIAS

BARROSO, Juliane Matsubara . **Conexões com a Matemática 9º ano**. Coleção Projeto Araribá. São Paulo: Moderna , 2007. 334p.

SOUZA, Joamir. **Matemática.** Coleção Novo Olhar. Belo Horizonte: Novo Rumo, [sd].

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática Contexto e Aplicações.** São Paulo: Ática, [sd].

Disponível em: http://michaelis.uol.com.br/moderno/portugues/index.php?lingua=portugues-portugues&palavra=equa%E7%E3o> **Equação.** Acesso em: 22 fev. 2014.22.

MÓDULO IX

UNIDADE II - FRAÇÕES DECIMAIS, PORCENTAGEM E POTENCIAÇÃO

Objetivos

- Reforçar os conteúdos básicos estudados no Ensino Fundamental e Ensino Médio;
- Identificar os conhecimentos matemáticos como meios para compreender o mundo a sua volta;
- Resolver situações-problema, sabendo validar estratégias e resultados, desenvolvendo formas de raciocínio;
- Sentir-se seguro da própria capacidade de construir conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções;
- Comunicar-se matematicamente, ou seja, descrever, representar e apresentar resultados com precisão e argumentar suas hipóteses.

FRAÇÕES

O símbolo $\frac{a}{b}$ significa a $\div$b, sendo ***a*** e ***b*** números naturais e ***b*** *diferente de zero*.

Chamamos:

- ***a*** de numerador;
- ***b*** de denominador.

Se ***a*** é múltiplo de ***b***, então $\frac{a}{b}$ é um número natural.

Veja um exemplo:

A fração $\frac{8}{2}$ é igual a $8 \div 2$. Neste caso, 8 é o numerador e 2 é o denominador.

Efetuando a divisão de 8 por 2, obtemos o quociente 4. Assim, $\frac{8}{2}$ é um número natural e 8 é múltiplo de 2.

SIMPLIFICAÇÃO DE FRAÇÕES

Uma fração equivalente a $\frac{9}{12}$, com termos menores, é $\frac{3}{4}$. A fração $\frac{3}{4}$ foi obtida dividindo-se ambos os termos da fração $\frac{9}{12}$ pelo fator comum 3. Dizemos que a fração $\frac{3}{4}$ é uma fração simplificada de $\frac{9}{12}$.

A fração $\frac{3}{4}$ não pode ser simplificada, por isso é chamada de ***fração irredutível*.**

A fração $\frac{3}{4}$ não pode ser simplificada porque 3 e 4 não possuem nenhum fator comum

ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE NÚMEROS FRACIONÁRIOS

Temos que analisar dois casos:

1º) Frações com denominadores iguais

Para somar frações com denominadores iguais, basta somar os numeradores
e conservar o denominador.
Para subtrair frações com denominadores iguais, basta subtrair os numeradores
e conservar o denominador.

$$\frac{4}{7} + \frac{2}{7} = \frac{6}{7}$$

$$\frac{5}{7} - \frac{2}{7} = \frac{3}{7}$$

2º) Frações com denominadores diferentes

Para somar frações com denominadores diferentes, uma solução é obter frações equivalentes, de denominadores iguais ao **MMC** (mínimo múltiplo comum ou menor múltipl0 comum) dos denominadores das frações.

Exemplo: somar as frações $\frac{4}{5}+\frac{5}{2}$. Obtendo o mmc dos denominadores temos mmc(5,2) = 10.

$$\begin{array}{l|l} 5,\ 2 & 2 \\ 5,\ 1 & 5 \\ 1,1 & \\ & 10 \end{array}$$

multiplicando-se os dois fatores obtém-se o MMC

$$\frac{4}{5}+\frac{5}{2}=$$

$$\frac{8}{10}+\frac{25}{10}=$$

$$\frac{33}{10}$$

O mmc obtido deverá ser dividido pelo denominador anterior e o resultado da divisao deverá ser multipicado pelo numerador da fração dada.Utilizamos o mmc para obter frações equivalentes e de mesmo denominador e depois somamos normalmente as frações obtdas conforme no 1º caso.

MULTIPLICAÇÃO E DIVISÃO DE NÚMEROS FRACIONÁRIOS

Na **multiplicação** de números fracionários, devemos multiplicar numerador por numerador, e denominador por denominador, assim como é mostrado nos exemplos abaixo:

$$\frac{8}{3}x\frac{4}{3}=\frac{8x4}{3x3}=\frac{32}{9}$$

$$\frac{-5}{2}x\frac{4}{3}=\frac{-5x4}{2x3}=\frac{-20}{6}=-\frac{20}{6}=-\frac{10}{3}$$

Na **divisão** de números fracionários, devemos multiplicar a primeira fração pelo inverso da segunda, como é mostrado no exemplo abaixo:

$$\frac{\frac{8}{3}}{\frac{4}{3}}=\frac{8}{3}x\frac{3}{4}=\frac{24}{12}=2$$

NUMERAÇÃO DECIMAL

A forma de **notação decimal**, que corresponde a uma outra forma de representação dos números racionais fracionários.

O uso dos números decimais é bem superior ao dos números fracionários. Observe que nos computadores e nas máquinas calculadoras utilizamos unicamente a forma decimal.

FRAÇÕES DECIMAIS

Observe as frações:

$$\frac{3}{10},\ \frac{4}{100},\ \frac{19}{1000},\ \frac{48}{10000}$$

$$\downarrow\qquad\downarrow\qquad\downarrow\qquad\downarrow$$

$$10^1\qquad 10^2\qquad 10^3\qquad 10^4$$

Os denominadores são potências de 10.

Assim:

Denominam-se **frações decimais**, todas as frações que apresentam potências de 10 no denominador.

Observe no quadro a representação de frações decimais através de números decimais:

Fração Decimal	=	Números Decimais
$\frac{5}{10}$	=	0,5
$\frac{5}{100}$	=	0,05
$\frac{5}{1000}$	=	0,005
$\frac{5}{10000}$	=	0,0005

Fração Decimal	=	Números Decimais
$\frac{117}{10}$	=	11,7
$\frac{117}{100}$	=	1,17
$\frac{117}{1000}$	=	0,117
$\frac{117}{10000}$	=	0,0117

Os números 0,1, 0,01, 0,001; 11,7, por exemplo, são números decimais.

Nessa representação, verificamos que a vírgula separa a parte inteira da parte decimal.

0,001
Parte decimal
Parte inteira

1,17
Parte decimal
Parte inteira

LEITURA DOS NÚMEROS DECIMAIS

No sistema de numeração decimal, cada algarismo, da parte inteira ou decimal, ocupa uma posição ou ordem com as seguintes denominações:

Centenas	Dezenas	Unidades	Décimos	Centésimos	Milésimos	Décimos milésimos	Centésimos milésimos	Milionésimos

Partes inteiras **Partes decimais**

Lemos a parte inteira, seguida da parte decimal, acompanhada das palavras:

- Décimos .... : quando houver uma casa decimal;
- Centésimos...................................... : quando houver duas casas decimais;
- Milésimos... : quando houver três casas decimais;
- Décimos milésimos .... : quando houver quatro casas decimais;
- Centésimos milésimos ....: quando houver cinco casas decimais e, assim sucessivamente.

EXEMPLOS:

a) 1,2: um inteiro e dois décimos;
b) 2,34: dois inteiros e trinta e quatro centésimos

Quando a parte inteira do número decimal é zero, lemos apenas a parte decimal.

EXEMPLOS:

a) 0,1 : um décimo;
b) 0,79 : setenta e nove centésimos

Observação:

1. Existem outras formas de efetuar a leitura de um número decimal. Observe a leitura do número 5,53:

Leitura convencional: cinco inteiros e cinquenta e três centésimos;

Outras formas: quinhentos e cinquenta e três centésimos;

cinco inteiros, cinco décimos e três centésimos.

2. Todo número natural pode ser escrito na forma decimal, bastando colocar a vírgula após o último algarismo e acrescentar zero(s).

Exemplos:

4 = 4,0 = 4,00 75 = 75,0 = 75,00

TRANSFORMAÇÃO DE NÚMEROS DECIMAIS EM FRAÇÕES DECIMAIS

Observe os seguintes números decimais:

- 0,8 (lê-se "oito décimos"), ou seja, $\frac{8}{10}$.
- 0,65 (lê-se "sessenta e cinco centésimos"), ou seja, $\frac{65}{100}$.
- 5,36 (lê-se "quinhentos e trinta e seis centésimos"), ou seja, $\frac{536}{100}$.
- 0,047 (lê-se "quarenta e sete milésimos"), ou seja, $\frac{47}{1000}$

Verifique então que:

Assim:

$0,\underbrace{8}_{\text{uma casa decimal}} = \dfrac{8}{1\underbrace{0}_{\text{um zero}}}$	$0,\underbrace{65}_{\text{duas casas decimais}} = \dfrac{65}{1\underbrace{00}_{\text{dois zeros}}}$
$5,\underbrace{36}_{\text{duas casas decimais}} = \dfrac{536}{1\underbrace{00}_{\text{dois zeros}}}$	$0,\underbrace{047}_{\text{três casas decimais}} = \dfrac{47}{1\underbrace{000}_{\text{três zeros}}}$

Um número decimal é igual à fração que se obtém escrevendo para numerador o número sem vírgula e dando para denominador a unidade seguida de tantos zeros quantas forem às casas decimais.

TRANSFORMAÇÃO DE FRAÇÃO DECIMAL EM NÚMERO DECIMAL

Observe as igualdades entre frações decimais e números decimais a seguir:

$$\frac{15}{1\underbrace{0}_{\text{um zero}}} = 1,\underbrace{5}_{\text{uma casa decimal}} \qquad \frac{31}{1\underbrace{00}_{\text{dois zeros}}} = 0,\underbrace{31}_{\text{duas casas decimais}}$$

$$\frac{7}{1\underbrace{000}_{\text{três zeros}}} = 0,\underbrace{007}_{\text{três casas decimais}} \qquad \frac{5825}{1\underbrace{0000}_{\text{quatro zeros}}} = 0,\underbrace{5825}_{\text{quatro casas decimais}}$$

Podemos concluir, então, que:

Para se transformar uma fração decimal em número decimal, basta dar ao numerador tantas casas decimais quantos forem os zeros do denominador.

OPERAÇÕES COM NÚMEROS RACIONAIS DECIMAIS

1 - Adição

Considere a seguinte adição:

$1{,}28 + 2{,}6 + 0{,}038$

Transformando em frações decimais, temos:

$$\frac{128}{100} + \frac{26}{10} + \frac{38}{1.000} = \frac{1.280}{1.000} + \frac{2.600}{1.000} + \frac{38}{1.000} = \frac{3.918}{1.000} = 3{,}918$$

Método prático

1º) Igualamos o número de casas decimais, com o acréscimo de zeros;

2º) Colocamos vírgula debaixo de vírgula;

3º) Efetuamos a adição, colocando a vírgula na soma alinhada com as demais.

Exemplos:

$1{,}28 + 2{,}6 + 0{,}038$

$$\begin{array}{r} 1{,}280 \\ +\,2{,}600 \\ 0{,}038 \\ \hline 3{,}918 \end{array}$$

$35{,}4 + 0{,}75 + 47$

$$\begin{array}{r} 35{,}40 \\ +\quad 0{,}75 \\ 47{,}00 \\ \hline 83{,}15 \end{array}$$

$6{,}14 + 1{,}8 + 0{,}007$

$$\begin{array}{r} 6{,}140 \\ +\,1{,}800 \\ 0{,}007 \\ \hline 7{,}947 \end{array}$$

2 – Subtração

Considere a seguinte subtração:

$3{,}97 - 2{,}013$

Transformando em fração decimais, temos:

$$\frac{397}{100} - \frac{2.013}{1.000} = \frac{3.970}{1.000} - \frac{2.013}{1.000} = \frac{1.957}{1.000} = 1{,}957$$

Método prático

1º) Igualamos o número de casas decimais, com o acréscimo de zeros;

2º) Colocamos vírgula debaixo de vírgula;

3º) Efetuamos a subtração, colocando a vírgula na diferença, alinhada com as demais.

Exemplos:

a) 3,97 - 2,01

$$\begin{array}{r} 3,970 \\ -\,2,013 \\ \hline 1,957 \end{array}$$

b) 17,2 - 5,146

$$\begin{array}{r} 17,200 \\ -\;\;5,146 \\ \hline 12,054 \end{array}$$

c) 9 - 0,987

$$\begin{array}{r} 9,000 \\ -\,0,987 \\ \hline 8,013 \end{array}$$

3 - Multiplicação

Considere a seguinte multiplicação: 3,49 · 2,5

Multiplicamos os dois números decimais como se fossem naturais. Colocamos a vírgula no resultado de modo que o número de casas decimais do produto seja igual à soma dos números de casas decimais dos fatores.

Exemplos:

a) 3,49 · 2,5 =

$$\begin{array}{rl} 3,49 & \longrightarrow \textbf{2 casas decimais.} \\ \times\;\;2,5 & \longrightarrow \textbf{1 casa decimal.} \\ \hline 1745 & \\ +\,698\;\; & \\ \hline 8,725 & \longrightarrow \textbf{3 casas decimais.} \end{array}$$

b) 1,842 . 0,013 =

$$\begin{array}{rl} 1,842 & \longrightarrow \textbf{3 casas decimais.} \\ \times\;\;0,013 & \longrightarrow \textbf{3 casas decimais.} \\ \hline 5526 & \\ +\,1842\;\; & \\ \hline 0,023946 & \longrightarrow \textbf{6 casas decimais.} \end{array}$$

Observação:

1. Para se multiplicar um número decimal por 10, 100, 1.000, ..., basta deslocar a vírgula **para a direita** uma, duas, três, ..., casas decimais.

   Exemplos:

   a) $2,684 \cdot 10 = \dfrac{2.684}{1.00\cancel{0}} \cdot 1\cancel{0} = \dfrac{2.684}{100} = 26,84$

   a vírgula desloca-se uma casa

   b) $2,684 \cdot 100 = \dfrac{2.684}{1.0\cancel{0}\cancel{0}} \cdot 1\cancel{0}\cancel{0} = \dfrac{2.684}{10} = 268,4$

   a vírgula desloca-se duas casas

   c) $2,684 \cdot 1.000 = \dfrac{2.684}{1.\cancel{0}\cancel{0}\cancel{0}} \cdot 1.\cancel{0}\cancel{0}\cancel{0} = \dfrac{2.684}{1} = 2684,0 = 2.684$

   a vírgula desloca-se três casas

2. Os números decimais podem ser transformados em porcentagens.

Exemplos

a) $0{,}05 = \frac{5}{100} = 5\%$ b) $1{,}17 = \frac{117}{100} = 117\%$

4 - Divisão

1º: Divisão exata

Considere a seguinte divisão: 1,4 : 0,05

1º) Igualamos os números de casas decimais, com o acréscimo de zeros;

2º) Suprimimos as vírgulas;

3º) Efetuamos a divisão.

Exemplos:

• **1,4 : 0,05** Igualamos as casas decimais: 1,4**0** : 0,05 Suprimindo as vírgulas: 140 : 5 **Logo, o quociente de 1,4 por 0,05 é 28.**	**Efetuado a divisão**
• **6 : 0,015** Igualamos as casas decimais 6,000 : 0,015 Suprimindo as vírgulas 6.000 : 15 **Logo, o quociente de 6 por 0,015 é 400.**	Efetuando a divisão 6000 | 15 000 **400**
• **4,096 : 1,6** Igualamos as casas decimais 4,096 : 1,600 Suprimindo as vírgulas 4.096 : 1.600	Efetuando a divisão 4.096 | 1.600 896 **2**

Observe que na divisão acima o quociente inteiro é 2 e o resto corresponde a 896 unidades. Podemos prosseguir a divisão determinando a parte decimal do quociente. Para a determinação dos décimos, colocamos uma **vírgula** no quociente e acrescentamos um **zero** resto, uma vez que 896 unidades que corresponde a 8.96**0** décimos.

4.096	1.600
896**0**	**2 ,**

4.096	1.600
8960	**2 , 5**
960	

4.096	1.600
8960	**2 , 56**
960**0**	
0	

Continuamos a divisão para determinar os centésimos acrescentando outro **zero** ao novo resto, uma vez que 960 décimos correspondem a 960**0** centésimos. O quociente **2,56** é exato, pois o resto é nulo. Logo, o quociente de 4,096 por 1,6 é 2,56.

PORCENTAGEM

É frequente o uso de expressões que refletem acréscimos ou reduções em preços, números ou quantidades, sempre tomando por base 100 unidades.

Alguns exemplos:

- A gasolina teve um aumento de 15%

  Significa que em cada R$100 houve um acréscimo de R$15,00

- O cliente recebeu um desconto de 10% em todas as mercadorias.

  Significa que em cada R$100 foi dado um desconto de R$10,00

- Dos jogadores que jogam no Grêmio, 90% são craques.
  Significa que em cada 100 jogadores que jogam no Grêmio, 90 são craques.

RAZÃO CENTESIMAL

Toda a razão que tem para consequente o número 100 denomina-se **razão centesimal**.

Alguns exemplos:

$$\frac{7}{100}, \frac{16}{100}, \frac{125}{100}, \frac{210}{100}$$

Podemos representar uma razão centesimal de outras formas:

$$\frac{7}{100} = 0{,}07 = 7\% \qquad \text{(lê - se "sete por cento")}$$

$$\frac{16}{100} = 0{,}16 = 16\% \qquad \text{(lê - se "dezesseis por cento")}$$

$$\frac{125}{100} = 1{,}25 = 125\% \qquad \text{(lê - se "cento e vinte e cinco por cento")}$$

As expressões 7%, 16% e 125% são chamadas **taxas centesimais** ou **taxas percentuais**.

Considere o seguinte problema:

a) João vendeu 50% dos seus 50 cavalos. Quantos cavalos ele vendeu?

Para solucionar esse problema devemos aplicar a taxa percentual (50%) sobre o total de cavalos.

$$50\% \text{ de } 50 = \frac{50}{100} . 50 = \frac{2500}{100} = 25 \text{ cavalos}$$

Logo, ele vendeu 25 cavalos, que representa a **porcentagem** procurada.

Exemplos:

- *Calcular 10% de 300.*

$$10\% \text{ de } 300 = \frac{10}{1\cancel{00}} . 3\cancel{00} = 30$$

- *Calcular 25% de 200kg.*

$$25\% \text{ de } 200 = \frac{25}{1\cancel{00}} . 2\cancel{00} = 50$$

Porcentagem é o valor obtido ao aplicarmos uma taxa percentual a um determinado valor.

Logo, 50kg é o valor correspondente à porcentagem procurada.

ATIVIDADE DE FIXAÇÃO

1) Um jogador de futebol, ao longo de um campeonato, cobrou 75 faltas, transformando em gols 8% dessas faltas. Quantos gols de falta esse jogador fez?

____

____

2) Se eu comprei uma ação de um clube por R$250,00 e a revendi por R$300,00, qual a taxa percentual de lucro obtida?

____

____

GABARITO

1- $8\% \text{ de } 75 = \frac{8}{100}.75 = \frac{600}{100} = 6$

Portanto o jogador fez 6 gols de falta.

2- Montamos uma equação, onde somando os R$250,00 iniciais com a porcentagem que aumentou em relação a esses R$250,00, resulte nos R$300,00.

$$250 + 250.\frac{x}{100} = 300$$
$$2{,}5.x = 300 - 250$$
$$x = \frac{50}{2{,}5}$$
$$x = 20$$

Portanto, a taxa percentual de lucro foi de 20%.

Uma dica importante:

FATOR DE MULTIPLICAÇÃO.

Se, por exemplo, há um acréscimo de 10% a um determinado valor, podemos calcular o novo valor apenas multiplicando esse valor por **1,10**, que é o fator de multiplicação. Se o acréscimo for de 20%, multiplicamos por **1,20**, e assim por diante.

Veja a tabela abaixo:

Acréscimo ou Lucro	Fator de Multiplicação
10%	**1,10**
15%	**1,15**
20%	**1,20**
47%	**1,47**
67%	**1,67**

Exemplo: Aumentando 10% no valor de R$10,00 temos: 10 x 1,10 = **R$ 11,00**

No caso de haver um decréscimo, o fator de multiplicação será:

Fator de Multiplicação = 1 - taxa de desconto (na forma decimal)

Veja a tabela abaixo:

Desconto	Fator de Multiplicação
10%	0,90
25%	0,75
34%	0,66
60%	0,40
90%	0,10

Exemplo: Descontando 10% no valor de R$10,00 temos: 10 x 0,90 = **R$ 9,00**

Exemplo 1

Uma mercadoria é vendida em, no máximo, três prestações mensais e iguais, totalizando o valor de R$ 900,00. Caso seja adquirida à vista, a loja oferece um desconto de 12% sobre o valor a prazo. Qual o preço da mercadoria na compra à vista?

Podemos utilizar a razão centesimal ou o número decimal correspondente.

12% = 12/100 = 0,12

Utilizando razão centesimal

12/100 x 900 = 12x900/100 = 1080/100 = 10800/100 = 108 reais

900 – 108 = 792 reais

Utilizando número decimal

0,12 x 900 = 108 reais

900 – 108 = 792 reais

A utilização de qualquer procedimento fica a critério próprio, pois os dois métodos chegam ao resultado de forma satisfatória e exata. No caso do exemplo 1, o desconto no pagamento à vista é de R$ 108,00, portanto o preço é de R$ 792,00.

Exemplo 2

O FGTS (Fundo de Garantia por Tempo de Serviço) é um direito do trabalhador com carteira assinada, no qual o empregador é obrigado por lei a depositar em uma conta na Caixa Econômica Federal o valor de 8% do salário bruto do funcionário. Esse dinheiro deverá ser sacado pelo funcionário na ocorrência de demissão sem justa causa. Determine o valor do depósito efetuado pelo empregador, calculado o FGTS sobre um salário bruto de R$ 1.200,00.

8% = 8/100 = 0,08

Utilizando razão centesimal

8/100 x 1200 = 8x1200 / 100 = 9600 / 100 = 96 reais

Utilizando número decimal

0,08 x 1200 = 96 reais

O depósito efetuado será de R$ 96,00.

Exemplo 3

Em uma sala de aula com 52 alunos, 13 utilizam bicicletas como transporte. Expresse em porcentagem a quantidade de alunos que utilizam bicicleta.

Podemos utilizar uma regra de três simples.

Alunos → 13 ---------- 52

Porcentagem → x ----------- 100%

52*x = 13*100

52x = 1300

x= 1300/52

x = 25%

Portanto, 25% dos alunos utilizam bicicletas.

POTENCIAÇÃO

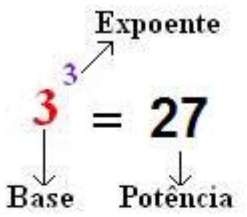
O conceito de potenciação é muito importante no que se refere aos desenvolvimentos dos exercícios nos conteúdos de equações e funções exponenciais, além de outras aplicações, e por este motivo temos que ter bastante cuidado ao estudar as propriedades e as principais características da potenciação. Estas propriedades já foram vistas e também suas principais características. E hoje vamos fazer um resumo das mesmas, de forma que sejam assimilados todos os conceitos vistos.

Vejamos:

A potenciação é uma multiplicação de fatores iguais.

Temos que, $(+3).(+3).(+2)=(+3)^3$

Na potência $(+3)^3 = +27$, temos:



Para os números inteiros relativos, temos:

1) **Bases positivas**

Vamos ver quanto vale $(+3)^2$

$(+3)^2 = (+3) . (+3) = +9$

E quanto vale $(+5)^4$?

$(+5)^4 = (+5) . (+5). (+5) . (+5) = +625$

Observação: Toda a potência de base positiva é sempre positiva.

2) **Bases negativas**

E agora, quanto vale $(-3)^2$?

$(-3)^2 = (-3). (-3) = +9$

E quanto vale $(-2)^3$?

$(-2)^3 = (-2). (-2). (-2) = -8$

Observação:

Toda potência de base negativa é positiva, se o expoente for par, e é negativa, se o expoente for ímpar.

PROPRIEDADES DA POTÊNCIA

I) **Toda potência de base 1 é igual a 1.**

Exemplos:

$1^2 = 1$

$1^6 = 1$

II) **Toda potência de expoente 1 é igual à base.**

Exemplos:

$2^1 = 2$

$3^1 = 3$

III) **Toda potência de expoente zero vale 1**.

Exemplos:

$1^0 = 1$

$2^0 = 1$

$a^0 = 1$ com a diferente de zero.

IV) **Toda potência de base igual a zero e expoente diferente de zero, vale zero.**

Exemplos:

$0^1 = 0$

$0^3 = 0$

V) **Toda potência de base 10 é igual a 1, seguido de tantos zeros quantas forem as unidades do expoente.**

Exemplos:

$10^1 = 10$

$10^2 = 100$

$10^3 = 1000$

OPERAÇÕES COM POTÊNCIAS

I) Multiplicação de potências de mesma base.

$2^{3}\cdot 2^{2} = 2^{3+2} = 2^{5}$

Conserva-se a base e somam-se os expoentes.

Vejamos mais alguns exemplos:

a) $2^{5} . 2^{3} = 2^{5+3} = 2^{8}$

b) $3^{7} . 3^{2} = 2^{7+2} = 3^{9}$

c) $3^{2} . 3 = 3^{2+1} = 3^{3}$

II) **Divisão de potências de mesma base:**

$2^{3} \div 2^{2} = 2^{3-2} = 2$

Conserva-se a base e subtrai-se do expoente do dividendo o expoente do divisor.

Vejamos outros exemplos:

a) $2^{5} \div 2^{2} = 2^{5-2} = 2^{3}$

b) $7^{4} \div 7^{3} = 7^{4-3} = 7$

c) $9^{3} \div 9^{2} = 9^{3-2} = 9$

III) **Potência de potência:**

$(2^{2})^{3} = 2^{2.3} = 2^{6}$

Conserva-se a base e multiplicam-se os expoentes.

Vejamos outros exemplos:

a) $(3^{4})^{2} = 3^{4.2} = 3^{8}$

b) $(2^{5})^{2} = 2^{5.2} = 2^{10}$

c) $(3^{4})^{1} = 3^{4.1} = 3^{4}$

IV) **Produto elevado a uma potência:**

$(3 . 5)^{2} = 3^{2} . 5^{2}$

Elevam-se cada fator à potência considerada, ou efetua-se a multiplicação e eleva-se o resultado à potência considerada.

$(3 . 5)^{2} = 15^{2}$

Vejamos mais alguns exemplos:

a) $(2 . 7)^{3} = 2^{3} . 7^{3}$

b) $(2 . 3. 4)^{5} = 2^{5} . 3^{5}. 4^{5}$

c) $(8 . 5)^{4} = 8^{4} . 5^{4}$

ATIVIDADE DE FIXAÇÃO

1- Qual é a alternativa que representa a fração $\frac{9}{2}$ em números decimais?

a) 3, 333
b) 4,25
c) 5,01
d) 4,5

2 – Qual é a alternativa que representa a fração $\frac{35}{1000}$ em números decimais?

a) 0,35
b) 3,5
c) 0, 035
d) 35

3 – Qual é a alternativa que representa o número 0,65 em fração decimal?

a) $\frac{65}{10}$
b) $\frac{65}{100}$
c) $\frac{65}{1000}$
d) $\frac{65}{10000}$

4 – Observe as frações e suas respectivas representações decimais:

I - $3/1000$ = 0, 003
II - $2367/100$ = 23,67
III - $129/10000$ = 0, 0129
IV - $267/10$ = 2,67

Utilizando as igualdades acima, escolha a alternativa correta:

a) I e II
b) I e IV
c) I, II e III
d) I, II, III e IV

5 – Qual é a alternativa que representa a soma dos números decimais 0,65 e 0,015?

a) 0,70
b) 0,775
c) 0,665
d) 1,00

6 – Qual é a alternativa que representa a soma de 4,013 e 10,182?

a) 14, 313
b) 13, 920
c) 14, 213
d) 14, 195

7 – Qual é a alternativa que é igual a diferença entre 242,12 e 724,96?

a) 48, 284
b) 586,28
c) 241,59
d) -482,84

8 – Calcule as expressões numéricas e, se possível, simplifique as frações, tornando-as irredutíveis:

a) $-\frac{1}{3}+\left(-\frac{5}{3}\right)=$

b) $\frac{5}{2}-\left(-\frac{7}{9}\right)-\frac{1}{3}=$

c) $13+\frac{3}{4}+\left(-\frac{5}{3}\right)+\frac{1}{6}=$

d) $-\frac{3}{2}-\left(-\frac{2}{5}\right)+10=$

e) $-1-\frac{3}{5}=$

f) $-\frac{3}{10}-\left(-\frac{4}{3}\right)+\frac{7}{5}=$

9 – Calcule as expressões a seguir da maneira que melhor lhe convier:

a) 4 – (-1,6) =

b) 0,8 + (-1,3) – (2,9) =

c) $5 - 8{,}1 + \left(-\frac{5}{4}\right) - \left(-\frac{9}{2}\right) =$

d) 0,6 + 0,7 – (2,38) =

e) $\frac{3}{4} + \left(-\frac{7}{2}\right) + (1{,}5) =$

10 - Calcule as operações e apresente a resposta na forma simplificada:

a) $\left(-\frac{3}{4}\right) \bullet \left(\frac{8}{15}\right) =$

b) $\left(-\frac{25}{16}\right) \bullet \left(\frac{28}{45}\right) \bullet \left(-\frac{9}{14}\right) =$

c) $\left(-\frac{3}{4}\right) \div \left(-\frac{21}{2}\right) =$

d) $\left(\frac{12}{56}\right) \div \left(\frac{15}{4}\right) =$

e) $\left(\frac{7}{9}\right) \div \left(-\frac{28}{36}\right) =$

11 – Calcule as potências:

a) $3^3 =$

b) $(0{,}15)^{-1} =$

c) $\left(-\frac{5}{7}\right)^{-2} =$

d) $\left(\frac{11}{12}\right)^{-2} =$

e) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3} =$

f) $(-0{,}25)^2 =$

12- Resolva os problemas:

a) Um texto foi digitado com um tipo de letra no tamanho de 10 pt, o que resultou em um total de 100 páginas. Sabe-se que, com o mesmo tipo de letra no tamanho 12 pt, seriam obtidas 144 páginas. Com base nessa informação, se 25% do texto foram digitados em tamanho 12 pt e o restante no tamanho 10 pt, determine o total de páginas digitadas.

b) Um concurso é composto por provas de Matemática, Ciências, Língua Portuguesa e Informática, cada qual com 10 questões. Se você tiver acertado 7 de Matemática, 5 de Português, 6 de Informática e 6 de Ciências, qual é a porcentagem de acertos obtidos?

c) Um advogado é contratado por uma senhora que possui uma causa avaliada em R$ 150 000,00. Esse advogado consegue receber 36% da causa. A parte cobrada por ele é 12% do valor recebido. Determine, em reais, a quantia que a senhora receberá sem a parte do advogado?

13 – Como você sabe, os icebergs são enormes blocos de gelo que se desprendem das geleiras polares e flutuam pelos oceanos. Suponha que a parte submersa de um iceberg corresponda a $\frac{8}{9}$ do seu volume total e que o volume da parte não submersa é de 135 000 m^3.

a) Calcule o volume total do iceberg.
b) Calcule o volume de gelo puro do iceberg supondo que 2% de seu volume total é constituído de "impurezas", como matéria orgânica, ar e minerais.

14 – No ano de 2003, no Brasil, foram emplacados aproximadamente 1 320 000 veículos nacionais e 15 000 veículos importados, sendo que 43% dos importados eram japoneses. Do total de veículos emplacados no Brasil, em 2003, a alternativa mais próxima da porcentagem de carros japoneses é:

a) 1%
b) 0,5%
c) 2%
d) 1,5%
e) 0,9%

GABARITO

1	D
2	C
3	B
4	D
5	C
6	D
7	D

1) a) -2 b) $\frac{53}{18}$ c) $\frac{147}{12}$ d) $\frac{89}{10}$ e) $-\frac{8}{3}$ f) $\frac{73}{30}$

2) a) 5,6 b) – 3,4 c) 0,15 d) – 1,08 e) – 1,25

3) a) $-\frac{2}{5}$ b) $\frac{5}{8}$ c) $\frac{1}{14}$ d) $\frac{2}{35}$ e) – 1

4) a) 27 b) $\frac{20}{3}$ c) $\frac{49}{25}$ d) $\frac{144}{121}$ e) $-\frac{27}{8}$ f) 0,0625

5) a) 111 páginas b) 60% c) R$ 47 520,00

6) a) 1 215 000 m^3 b) 1 190 700 m^3

7) B

REFERÊNCIAS

SOUZA, Joamir. ***Coleção Novo Olhar - Matemática*** . Vol. 1. 1ªEdição.Editora FTD, 2011.

RIBEIRO, Jackson - **Ciência linguagem e tecnologia - Matemática**. Vol. 1. 1ªEdição.Editora Scipione, 2012.

DANTE, Luiz Roberto. ***Matemática***: ***contexto e aplicações***. Vol. Único. Editora Ática, 2009.

YOUSSEF, Antônio N., Soares, Elizabeth, Fernandez, Vicente Paz. **Matemática** –Vol. Único.1ªEdição. Ed. Scipione. São Paulo. 2011

PAIVA, Manoel. **Matemática** –Vol. Único.1ªEdição. Ed. Moderna. São Paulo. 2005

MÓDULO X

UNIDADE II - FUNÇÕES

Objetivos

- Reforçar os conteúdos básicos estudados no Ensino Fundamental e Ensino Médio;
- Identificar os conhecimentos matemáticos como meios para compreender o mundo á sua volta;
- Resolver situações-problema, sabendo validar estratégias e resultados, desenvolvendo formas de raciocínio;
- Sentir-se seguro da própria capacidade de construir conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções;
- Comunicar-se matematicamente, ou seja, descrever, representar e apresentar resultados com precisão e argumentar suas hipóteses.

FUNÇÃO AFIM OU DE 1º GRAU

Uma função f: $\Re \rightarrow \Re$, chama-se ***função afim*** quando existem números reais **a** e **b,** com **a** $\neq$ **0** tal que ***f(x) = ax + b ou y = ax + b***, para todo x $\in$ IR.

Exemplos:

- f: $\Re \longrightarrow \Re$ tal que f(x) = -11x + $\sqrt{2}$, em que a = -11 e b = $\sqrt{2}$
- f: $\Re \longrightarrow \Re$ tal que f(x) = $\frac{1}{2}+\frac{3x}{5}$, em que a = $\frac{3}{5}$ e b = $\frac{1}{2}$
- f: $\Re \longrightarrow \Re$ tal que f(x) = 2x + 1, em que a = 2 e b = 1
- f: $\Re \longrightarrow \Re$ tal que f(x) = - 5x – 1, em que a = -5 e b = -1
- f: $\Re \longrightarrow \Re$ tal que f(x) = x, em que a = 1 e b = 0
- f: $\Re \longrightarrow \Re$ tal que f (x) = - 5, em que a = 0 e b = - 5

CASOS PARTICULARES DA FUNÇÃO AFIM

Uma função f: $\Re \to \Re$ chama-se ***função constante*** quando existe um número real b tal que f(x) = b, para todo x $\in \Re$.

Exemplos:

- f: $\Re \to \Re$ tal que f(x) = - 13
- f: $\Re \to \Re$ tal que f(x) = $\sqrt{7}$

A função afim pode

- **Constante (se a = 0)**
- **Polinomial do 1º grau (se a $\neq$ 0)**

OBSERVAÇÃO:

- Uma função polinomial do 1º grau que tem o coeficiente b = 0 recebe o nome de ***função linear***. Por exemplo: f(x) = 3x e g(x) = - 6x.
- A função polinomial do 1º grau f: $\Re \to \Re$ tal que f(x) = x é chamada de ***função identidade***. Nesse caso, a = 1 e b = 0.

DOMÍNIO, CONTRADOMÍNIO E IMAGEM

- Toda função a do 1º grau também terá domínio, imagem e contradomínio.

  Na função do 1º grau f(x) = 2x – 3 que pode ser representada por ***y = 2x – 3*** para acharmos o seu domínio e contradomínio, devemos estipular valores para x. Vamos supor que os valores de x serão: - 2 ; -1 ; 0 ; 1. Para cada valor de x teremos um valor em y, veja:

x = -2	**x = - 1**	**x = 0**	**x = 1**
y = 2 . (-2) – 3	y = 2 . (-1) – 3	y = 2 . 0 - 3	y = 2.1 - 3

y = - 4 – 3	y = -2 – 3	y = -3	y = 2 - 3
y = - 7	y = -5		y = -1

- ***Os valores de x são o domínio e a imagem e o contradomínio são os valores de y.***
- Então, podemos dizer que ***Df(x)*** = $\Re$ ***,*** ***CDf(x)*** = $\Re$ ***e Imf(x)*** = $\Re$ ***.***

ATIVIDADE COMENTADA

A água potável utilizada em propriedades rurais, de modo geral, é retirada de poços com o auxílio de uma bomba d'água com capacidade para bombear 15 litros por minuto. Essa bomba é ligada automaticamente quando o reservatório está com 250 litros de água e desligada ao enchê-lo. Antônio possui em seu sítio um sistema de bombeamento como o descrito acima. Considerando que a potência da bomba d'água utilizada é de 450 watts, então ela consome 0,45 kwh de energia elétrica.

a) Escreva uma função linear que represente o consumo dessa bomba d'água em quilowatt-hora, durante o tempo em que ela está em funcionamento.

b) Calcule o consumo dessa bomba d'água se ela permanecer em funcionamento durante 2h, 6h e 8h.

- Resolução:

  a) Chamando de C o consumo da bomba, em quilowatt-hora, e de t o tempo, em horas, a função que representa o consumo a partir do tempo de funcionamento é dada por:

  C(t) = 0,45 t

  b) Calculando C(2); C(6) e C(8), temos:

  b.1) C(2) = 0,45 . 2 = 0,90 kwh

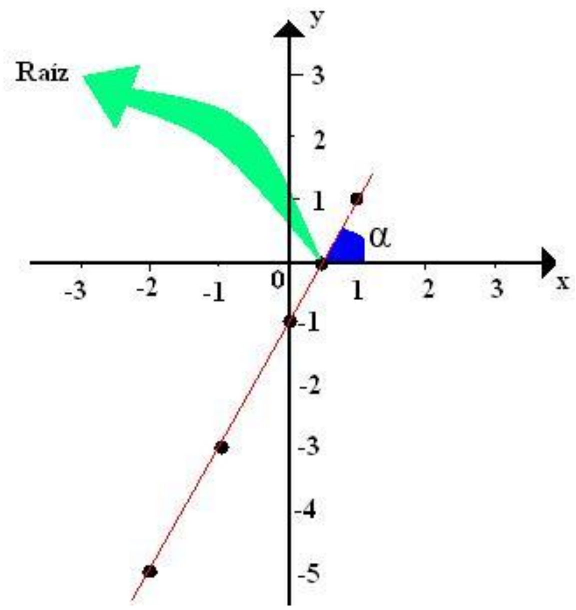
  b.2) C(6) = 0,45 . 6 = 2,7 kwh

  b.3) C(8) = 0,45 . 8 = 3,6 kwh

GRÁFICO DA FUNÇÃO AFIM

Toda função pode ser representada graficamente, e a função do 1º grau é formada por **uma reta**. Uma das maneiras de construir o gráfico de uma função afim é atribuindo valores à variável independente, obtendo pares ordenados e representando-os em um plano cartesiano.

Observe como podemos construir o gráfico da função afim f: $\Re \longrightarrow \Re$, cuja lei de formação é ***f(x) = 2x – 1 ou y = 2x - 1***. Inicialmente, atribuímos valores para x e calculamos valores correspondentes para y, determinando pares ordenados (x, y). Em seguida, representamos esses pares ordenados em um plano cartesiano. ***Veja: no eixo vertical colocamos os valores de y e no eixo horizontal colocamos os valores de x***.



x	y = 2x -1	(x, y)
-2	y = 2. (-2) – 1 = -5	(-2, -5)
-1	y = 2. (-1) – 1 = -3	(-1, -3)
0	y = 2.0 – 1 = -1	(0,-1)
$\frac{1}{2}$	y = 2. $\frac{1}{2}$ - 1 = 0	($\frac{1}{2}$,0)
1	y = 2.1 – 1 = 1	(1,1)

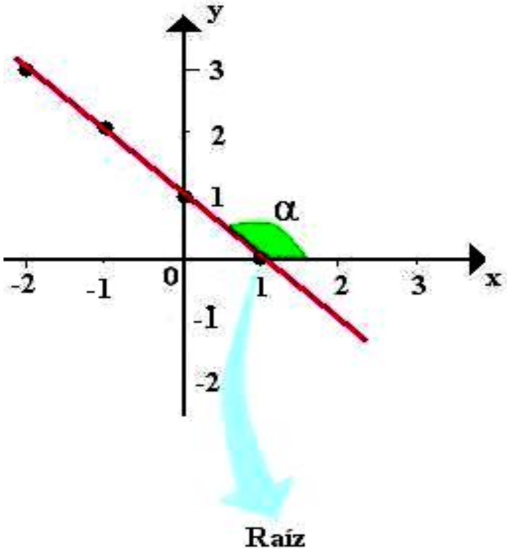
- **Quando a > 0** (isso significa que ***a será positivo***)

Podemos observar que **conforme o valor de x aumenta o valor de y também aumenta**, então dizemos que quando ***a > 0 a função é crescente***.

- **Quando a < 0** (isso indica que ***a será negativo***)

Por exemplo, dada à função ***f(x) = - x + 1 ou y = - x + 1***, onde a = -1 e b = 1. Inicialmente, atribuímos valores para x e calculamos valores correspondentes para y, determinando pares ordenados (x, y). Em seguida, representamos esses pares ordenados em um plano cartesiano.

x	**y = - x + 1**	**(x, y)**
-2	y = -(-2) + 1 = 3	(-2,3)
-1	y = -(-1) + 1 = 2	(-1,2)
0	y = - 0 + 1 = 1	(0,1)
1	y = -1 + 1 = 0	(1,0)



Podemos observar que **conforme o valor de x aumenta o valor de y diminui**, então dizemos que quando a < 0 a **função é decrescente.**

ATIVIDADE COMENTADA

O taxímetro é um aparelho de medição utilizado nos táxis para calcular quanto o passageiro vai pagar pela corrida. Em geral, o aparelho adiciona um valor fixo de denominado bandeirada a uma taxa por quilômetro rodado. Em certa cidade, dependendo do dia e do horário, existem dois tipos de cobrança:

Bandeira 1 (segunda a sábado, com exceção de feriados, das 6h às 20h):

R$ 3,20 pela bandeirada e R$ 1,50 por quilômetro rodado.

Bandeira 2 (demais horas e feriados):

R$ 4,50 pela bandeirada e R$ 2,00 por quilômetro rodado.

Esboce, em um mesmo plano cartesiano, os gráficos das funções afins, que representam os valores da corrida em função da quantidade x de quilômetros rodados nas bandeiradas 1 e 2 respectivamente.

- Resolução:

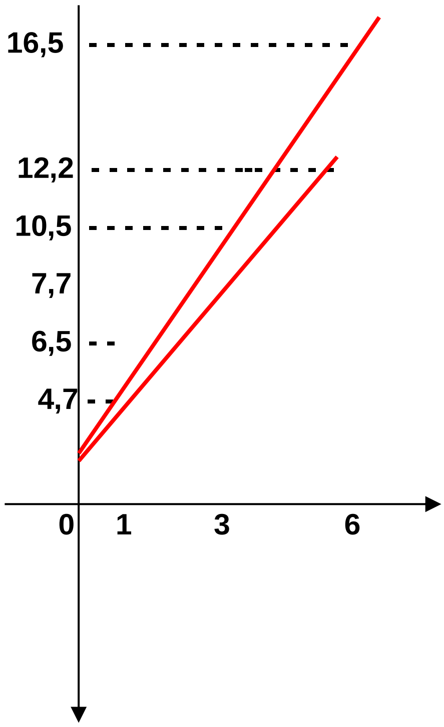
- bandeirada 1 → $f(x) = 3{,}20 + 1{,}5x$

- bandeirada 2 → $g(x) = 4{,}50 + 2x$

Para fazer os gráficos, vamos fazer as tabelas, obtendo os pares ordenados para marcação no plano cartesiano:

x	**f(x) = 1,5x + 3,20**	**(x,y)**
1	f(x) = 1,5. 1 + 3,20 = 4,7	(1;4,7)
3	f(x) = 1,5 . 3 + 3,20 = 7,7	(3;7,7)
6	f(x) = 1,5 . 6 + 3,20 = 12,2	(6;12,2)

x	**g(x) =2x + 4,5**	**(x,y)**
1	g(x) = 2.1 + 4,5 = 6,5	(1;6,5)
3	g(x) = 2.3 + 4,5 = 10,5	(3;10,5)
6	g(x) = 2.6 + 4,5 = 16,5	(6;16,5)



RAIZ OU ZERO DA FUNÇÃO AFIM

Chama-se **zero ou raiz** da função polinomial do 1º grau $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$, **o número real *x* tal que $f(x) = 0$.**

Temos:

$f(x) = 0 \Rightarrow ax + b = 0 \Rightarrow \boxed{x = \frac{-b}{a}}$

Vejamos alguns exemplos:

- a) Obtenção do zero da função $f(x) = 2x - 5$:

  $f(x) = 0 \quad 2x - 5 = 0$

  $2x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$

- b) Cálculo da raiz da função $g(x) = 3x + 6$:

  $g(x) = 0 \quad 3x + 6 = 0$

  $3x = -6$

  $x = -\frac{6}{3}$

  $x = -2$

- c) Calcule a raiz da função $f(x) = 2x + 4$

  $f(x) = 0 \quad 2x + 4 = 0$

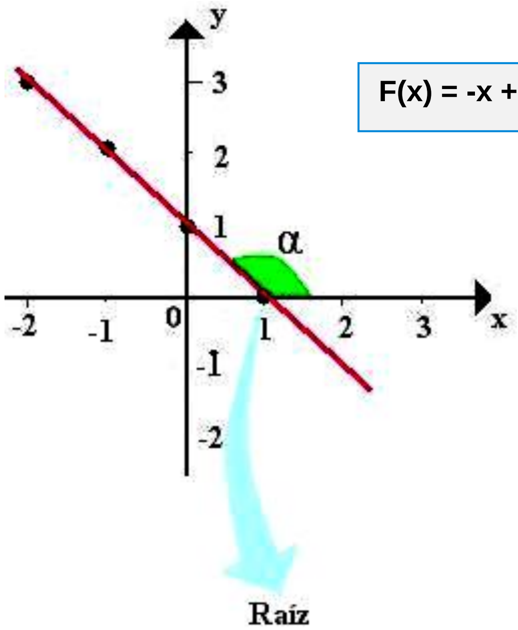
  $2x = -4$

  $x = -\frac{4}{2}$

  $x = -2$

COEFICIENTES DE UMA FUNÇÃO AFIM

Os coeficientes ***a*** e ***b*** de uma função afim fornecem informações a respeito do comportamento de seu gráfico. Observe abaixo o gráfico de algumas funções:



F(x) = -x + 1 ⇒ **Função Decrescente**

No gráfico de cada uma dessas funções podemos notar que o valor da ordenada do ponto em que as retas interceptam o eixo y é igual ao coeficiente b da função. Por exemplo, na função f(x) = x – 4, temos b = -4, e o gráfico intercepta o eixo y no ponto de coordenadas (0, -4).

⇨ O gráfico de uma função intercepta o eixo y quando x = 0. No caso de uma função afim:

$F(x) = ax + b \Longrightarrow f(0) = a \cdot 0 + b \Longrightarrow f(0) = b$

Em uma função afim f(x) = ax + b, o coeficiente ***b*** é chamado ***coeficiente linear.***

Observando o gráfico de uma função afim, podemos notar também que cada uma dessas retas forma um ângulo de medida α com o eixo x. Esse ângulo está relacionado ao coeficiente **a** da função.

> Em uma função afim f(x) = ax + b, o coeficiente ***a*** é chamado ***coeficiente angular*** ou ***declividade***. Esse coeficiente está associado à inclinação da reta que representa o gráfico da função.

PARA VOCÊ GUARDAR:

Características de um gráfico de uma função do 1º grau.

- Com ***a > 0*** o gráfico será ***crescente.***
- Com ***a < 0*** o gráfico será ***decrescente.***
- O ângulo α formado com a reta e com o ***eixo x será agudo*** (menor que 90°) quando a > 0.
- O ângulo α formado com reta e com ***o eixo x será obtuso*** *(maior que 90º)* quando a < 0.
- Na construção de um gráfico de uma função do 1º grau basta indicar apenas dois valores pra x, pois o gráfico é uma reta e uma reta é formada por, no mínimo, 2 pontos.
- Apenas ***um ponto corta o eixo x***, e esse ponto ***é a raiz da função***.
- Apenas ***um ponto corta o eixo y***, esse ponto ***é o valor de b.***

ESTUDO DOS SINAIS

Estudar o sinal de uma função qualquer y = f(x) é determinar os valor de x para os quais ***y é positivo***, y ***é zero*** ou ***y é negativo***.

Consideremos uma função afim ***y = f(x) = ax + b*** vamos estudar seu sinal.

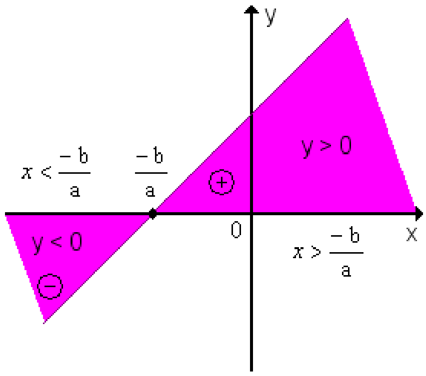
Já vimos que essa função se anula para um valor de ***x*** chamado ***raiz***. Há dois casos possíveis:

- 1º) ***a > 0 (a função é crescente)***

y > 0 ax + b > 0 $x > \frac{-b}{a}$

y < 0 ax + b < 0 $x < \frac{-b}{a}$

y = 0 ax + b = 0 $x = \frac{-b}{a}$



Conclusão:

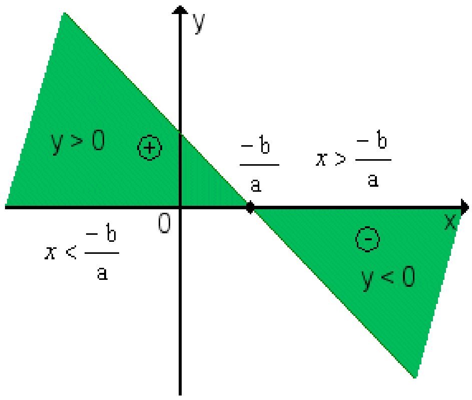
- ***y é positivo*** para valores de ***x maiores que a raiz***;
- ***y é negativo*** para valores de ***x menores que a raiz***.
- ***y é igual a zero*** para valores de ***x igual a raiz.***

- 2º) ***a < 0 (a função é decrescente)***

y > 0, ax + b > 0 , $x < \frac{-b}{a}$

y < 0, ax + b < 0 , $x > \frac{-b}{a}$

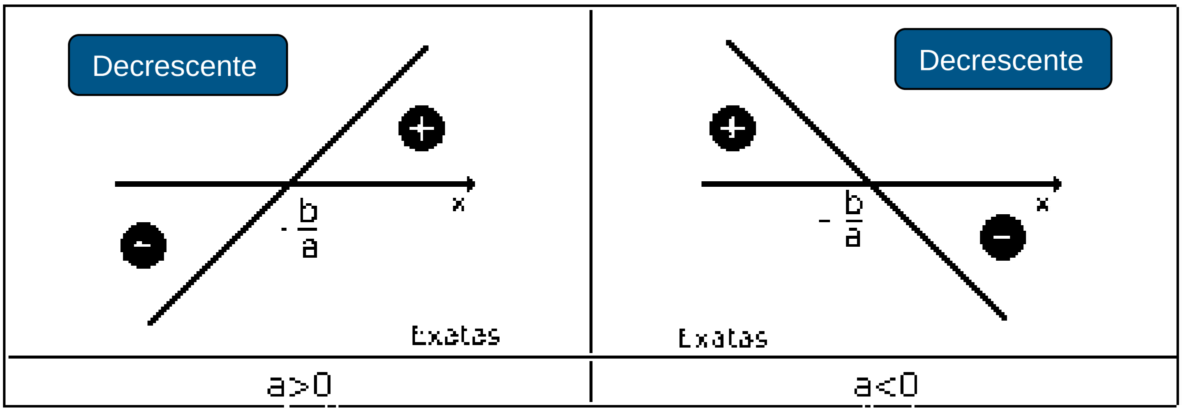
y = 0, ax + b = 0 , x = 0



Conclusão:

- ***y é positivo*** para valores de ***x menores que a raiz***;
- ***y é negativo*** para valores de ***x maiores que a raiz.***
- ***y é igual a zero*** para valores de ***x igual à raiz***.

Para você guardar:



INEQUAÇÃO DE 1º GRAU

Sendo f: $\Re \to \Re$ uma função, chamamos de inequação toda desigualdade que, quando reduzida, possui uma das seguintes formas:

- $f > 0$
- $f < 0$
- $f \geq 0$
- $f \leq 0$

Sendo f(x) = ax + b uma função afim, chamamos inequação do 1º grau toda desigualdade que, quando reduzida, possui uma das seguintes formas:

- $ax + b > 0$
- $ax + b < 0$
- $ax + b \geq 0$
- $ax + b \leq 0$

Exemplos:

a) $-2x + 7 > 0$ b) $x - 10 \leq 0$
c) $2x + 5 \leq 0$ d) $12 - x < 0$

Resolvendo uma inequação de 1° grau

Uma maneira simples de resolver uma equação do 1° grau é isolarmos a incógnita x em um dos membros da igualdade. Observe dois exemplos:

Exemplo1: Resolva a inequação -2x + 7 > 0.

Solução:
-2x > -7
Multiplicando por (-1)

$2x < 7$

$x < \frac{7}{2}$

Portanto a solução da inequação é $x < \frac{7}{2}$.

Exemplo 2: Resolva a inequação 2x – 6 < 0.

Solução:
2x < 6
x < 6/2
x < 3

Portanto a solução da inequação é x < 3

Pode-se resolver qualquer inequação do 1° grau por meio do estudo do sinal de uma função do 1° grau, com o seguinte procedimento:

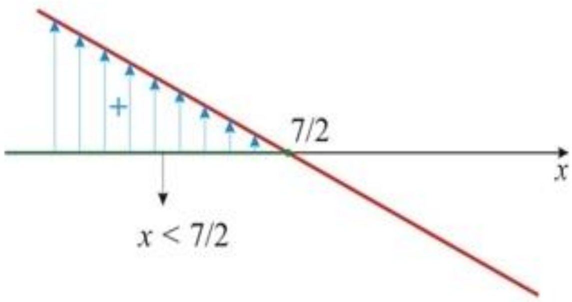
1. Iguala-se a expressão ax + b a zero;
2. Localiza-se a raiz no eixo x;
3. Estuda-se o sinal conforme o caso.

Exemplo 1:

$-2x + 7 > 0$

$-2x + 7 = 0$

$x = \frac{7}{2}$ $\quad S = \{ x \in \Re \,/\, x < \frac{7}{2} \}$



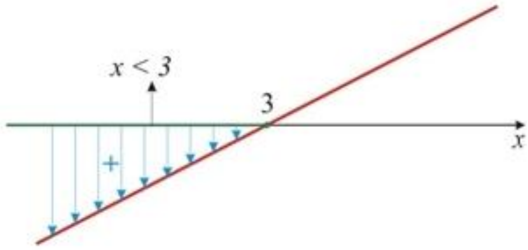
Exemplo 2:

$2x - 6 < 0$

$2x - 6 = 0$

$x = 3$

S = { x $\in \Re$ / x < 3}



Exemplo 3:

Determinar a solução da inequação $\frac{x+4}{3} - \frac{3x+2}{4} \geq 0$

Resolução:

Será necessário tirar o mmc (3,4) = 12

$$\frac{4(x+4) - 3(3x+2)}{12} \geq \frac{0}{12}$$

Como os denominadores ficaram iguais, eles podem ser "cortados" e depois basta resolver a equação do numerador.

$4(x+4) - 3(3x + 2) \geq 0$

$4x + 16 - 9x - 6 \geq 0$

$4x - 9x \geq -16 + 6$

$-5x \geq -10$

$5x \leq 10$

$x \leq \frac{10}{5}$

$x \leq 2$, assim o conjunto solução da inequação é S = {x$\in \Re$ / x $\leq$ 2}

Resolver uma inequação produto consiste em encontrar os valores de x que satisfazem a condição estabelecida pela inequação. Para isso utilizamos o estudo do sinal de uma função. Observe a resolução da seguinte equação produto: $(2x + 6)(-3x + 12) > 0$.

Vamos estabelecer as seguintes funções: $y_1 = 2x + 6$ e $y_2 = -3x + 12$.

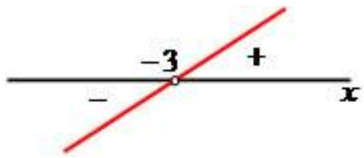
Determinando a raiz da função ($y = 0$) e a posição da reta ($a > 0$ crescente e $a < 0$ decrescente).

$y_1 = 2x + 6$

$2x + 6 = 0$

$2x = -6$

$x = -3$

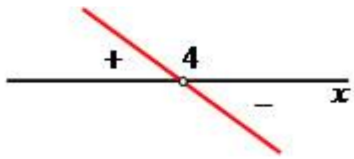


$y_2 = -3x + 12$

$-3x + 12 = 0$

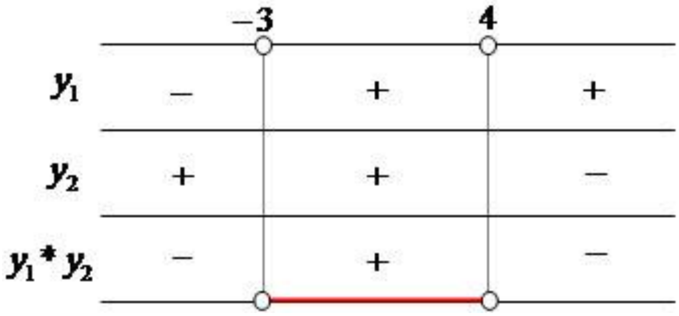
$-3x = -12$

$x = 4$



Verificando o sinal da inequação produto $(2x + 6)(3x + 12) > 0$. Observe que a inequação produto exige a seguinte condição: os possíveis valores devem ser maiores que zero, isto é, positivo.

possíveis valores devem ser maiores que zero, isto é, positivo.



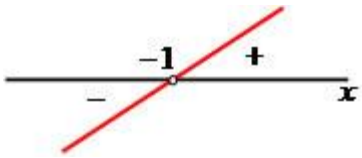
Através do esquema que demonstra os sinais da inequação produto y1 x y2, podemos chegar à seguinte conclusão quanto aos valores de x: **S = {x Є IR / –3 < x < 4}**

INEQUAÇÃO - QUOCIENTE

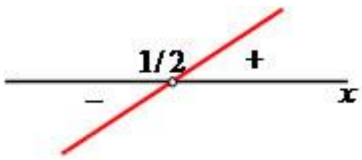
Na resolução da inequação quociente utilizamos os mesmos recursos da inequação produto, o que difere é que, ao calcularmos a função do denominador, precisamos adotar valores maiores ou menores que zero e nunca igual a zero. Observe a resolução da seguinte inequação quociente:

$$\frac{x+1}{2x-1} \leq 0$$

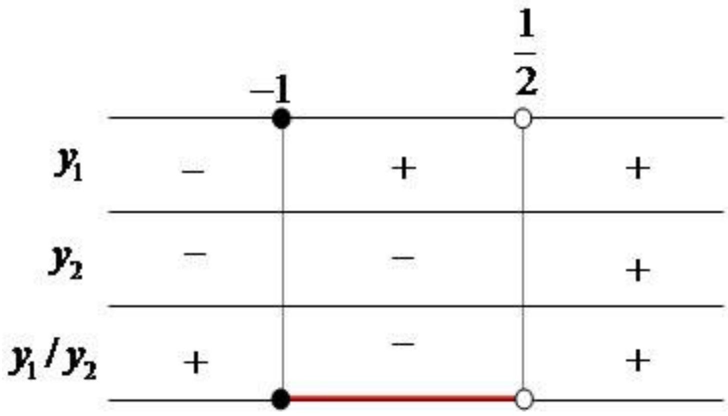
Resolver as funções $y_1 = x + 1$ e $y_2 = 2x - 1$, determinando a raiz da função (y = 0) e a posição da reta (a > 0 crescente e a < 0 decrescente).



$y_1 = x + 1$
$x + 1 = 0$
$x = -1$



$y_2 = 2x - 1$
$2x - 1 = 0$
$2x = 1$
$x = 1/2$



Com base no jogo de sinal concluímos que x assume os seguintes valores na inequação quociente: **S = {x Є IR / –1 ≤ x < ½}** .

ATIVIDADE DE FIXAÇÃO

1) A velocidade do som é fortemente influenciada pela temperatura do meio de propagação. Por exemplo, no ar, quando a temperatura é de 20° C, a velocidade do som é de aproximadamente 342,2 m/s, e à temperatura de 40º C a velocidade do som é de aproximadamente 354 m/s.

A indicação m/s lê-se “ metros por

a) Escreva a lei da função que representa a velocidade ***V*** do som em relação à temperatura ***t*** do ar, considerando que esta seja uma função afim.

b) Quais são os valores dos coeficientes da função que você escreveu no item a?

c) A maior temperatura já registrada na Terra ocorreu no dia 13 de setembro de 1992, na cidade de Al’Azizyah, no deserto do Saara, Líbia, onde foram registrados 58°C. Considerando a propagação do ar, qual a velocidade alcançada pelo som em Al’Azizyah nesse dia?

2) Resolva as inequações abaixo, considerando U = $\Re$:

a) $(x + 2)\left(-\frac{1}{2} + 3x\right) > 0$

b) $\frac{x+7}{2-x} \leq 0$

c) $5 \leq 3x - 4 < x + 2$

d) $(x + 1)(3x - 2) < 0$

e) $(x^2 - 1) \geq 0$

3) Represente graficamente a função $f: R \to R$ definida por:

a) f(x) = 2x-1

b) f(x) = -1/2x+3

c) f(x) = 4x

d) f(x) = 1/3x+2

e) f(x) = -3x+6

4) Determine a raiz ou zero de cada uma das seguintes equações:

a) f(x) = 2x+5

b) f(x) = -x+2

c) f(x) = 1/3x+3

d) f(x) = 1-5x

e) f(x) = 4x

5) Dada a função do 1° grau F(x) = (1-5x) Determinar:

a)F(0) B. F(-1) C. F(1/5) D. F(-1/5)?

b)Fazendo x = 0 na equação f(x) = 1 - 5x temos:

c)Fazendo x = -1 na equação f(x) = 1 - 5x temos:

d)Fazendo x = -1/5 na equação f(x) = 1 - 5x temos:

GABARITO

1-

A) V(t) = 0,59t + 330,4

B) a = 0,59 e b = 330,4

C) 364,62 m/s

2-

A) S = { x $\in \Re / x < -2$ ou x > $\frac{1}{6}$ }

B) S = { x $\in \Re / x < -7$ ou x > 2}

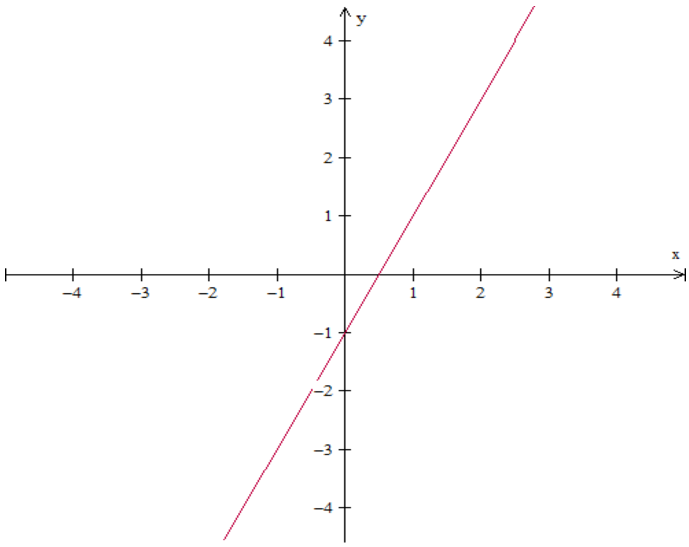
C) S = { } ou ∅

D) S = { x $\in \Re / -1 < x < \frac{2}{3}$ }

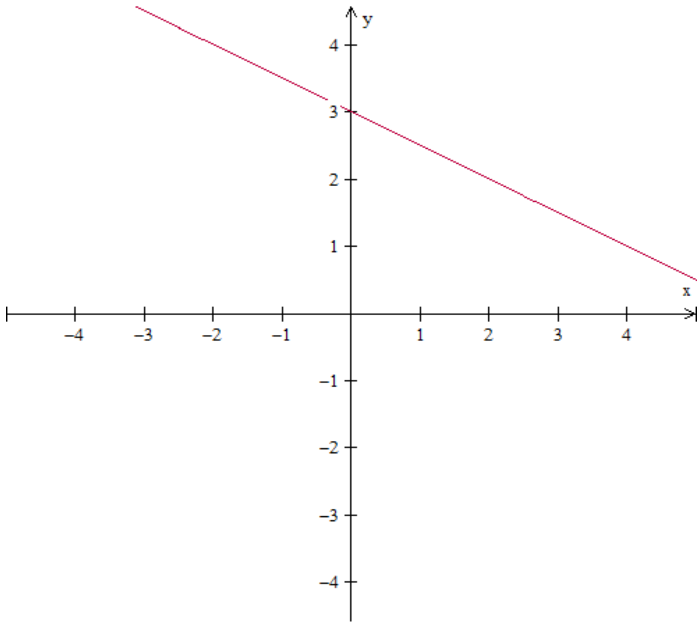
E) S = { x $\in \Re / x \leq -1$ ou x ≥ 1}

3 –

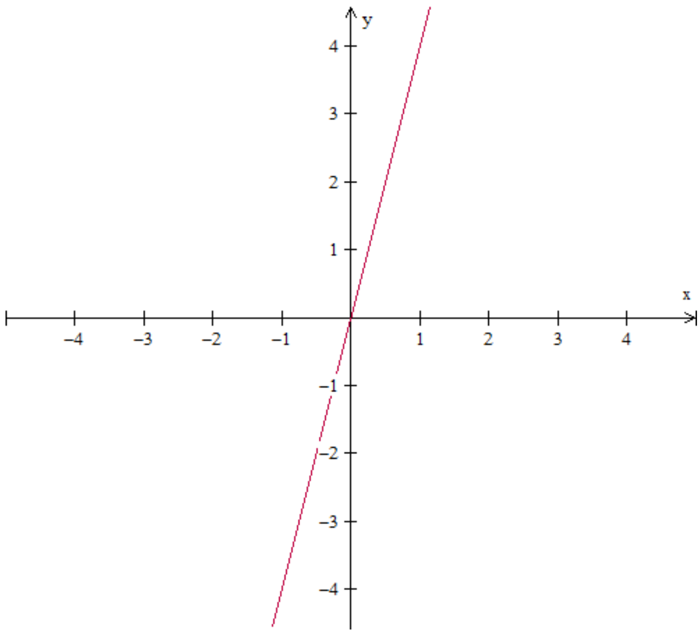
A) Y = 2X – 1



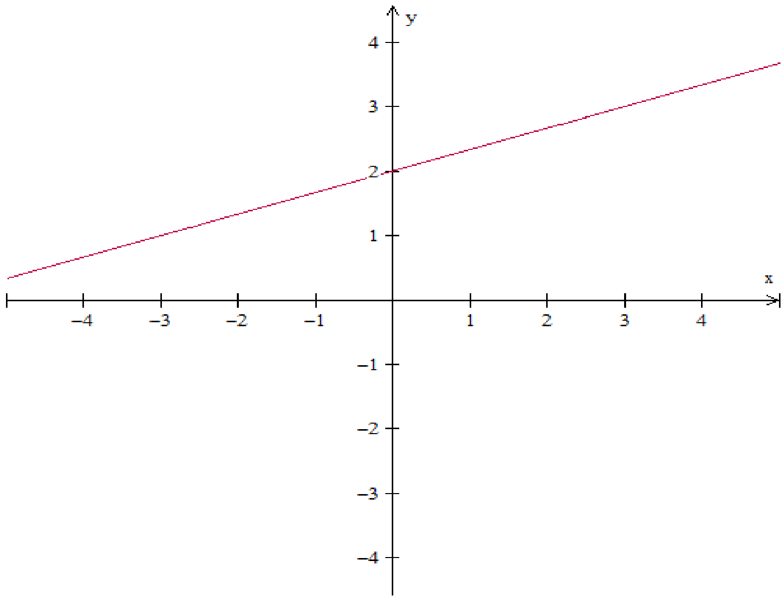
B) $y = -1/2x + 3$



C) $y = 4x$



D) $y = 1/3x + 2$



4-

a) $\frac{5}{2}$ d) $\frac{1}{5}$

b) 2 e) 0

c) 9

5-

A) f(0) = 1 - 5.(0) = 1 - 0 = 1

B) f(-1) = 1 - 5.(-1) = 1 + 5 = 6

C) 1-5.1/5= 1-5/5= 0

D) f(-1/5) = 1 - 5.(-1/5) = 1 + 5/5 = 1 + 1 = 2

FUNÇÃO 2º GRAU

A função do 2º grau, também denominada função quadrática, é definida pela expressão do tipo:

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ onde a, b e c são constantes reais e } a \neq 0$$

Exemplos:

a) $y = f(x) = x^2 + 3x + 2$ (a=1; b=3; c=2)

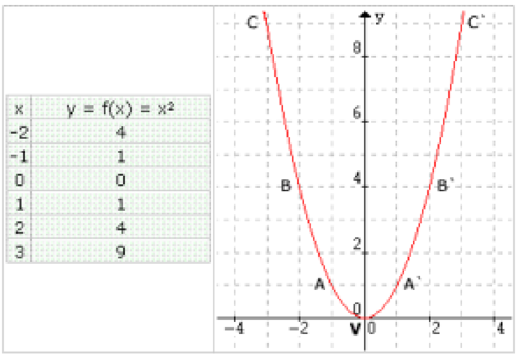
b) $y = f(x) = x^2$ (a=1; b=0; c=0)

c) $y = f(x) = x^2 - 4$ (a=1; b=0; c=-4)

GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO DO 2º GRAU:

O gráfico de uma função quadrática é uma parábola:

Representação gráfica

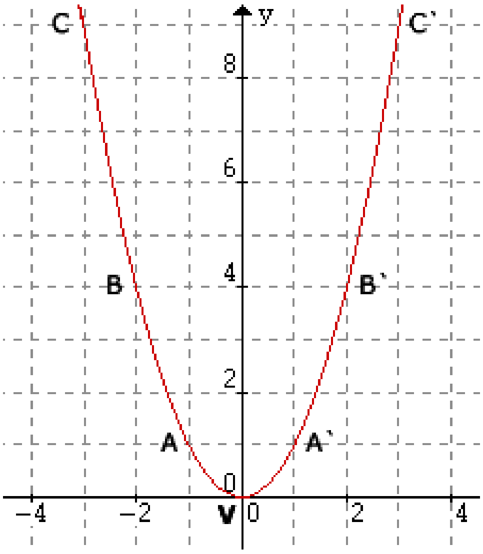


x	$y = f(x) = x^2$
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9

Exemplo: Construa o gráfico da função $y=x^2$:

Solução: Como na função do 1º grau, basta atribuir valores reais para x, obtemos seus valores correspondentes para y.

Notem que os pontos: A e A`, B e B`, C e C` são simétricos (estão a mesma distância do eixo de simetria). O ponto V representa o vértice da parábola, é a partir dele que determinamos todos os outros pontos.



COORDENADAS DO VÉRTICE

A coordenada x do vértice da parábola pode ser determinada por . $x = \frac{-b}{2a}$

Exemplo: Determine as coordenadas do vértice da parábola y = x² - 4x + 3

Temos: a=1, b=-4 e c=3

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2.1} = \frac{4}{2} = 2$$

Logo, a coordenada x será igual a 2, mas e a coordenada y?

Simples: Vamos substituir o valor obtido da coordenada x e determinar o valor da coordenada y. Assim, para determinarmos a coordenada y da parábola $y=x^2-4x+3$, devemos substituir o valor de x por 2.

$$y = (2)^2 - 4.(2) + 3 = 4 - 8 + 3 = -1$$

Logo, as coordenadas do vértice serão V= (2,-1)

Portanto, para determinarmos as coordenadas do vértice de uma parábola, achamos o valor da coordenada x (através de $x_v = -\frac{b}{2a}$) e substituindo este valor na função, achamos a coordenada y.

A coordenada y do vértice da parábola também pode ser determinada pela fórmula:

$$\boldsymbol{y_v = -\frac{\Delta}{4a}}$$

Assim o ***vértice de uma parábola*** pode ser obtido usando ***suas coordenadas***:

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

RAÍZES (OU ZEROS) DA FUNÇÃO DO 2º GRAU

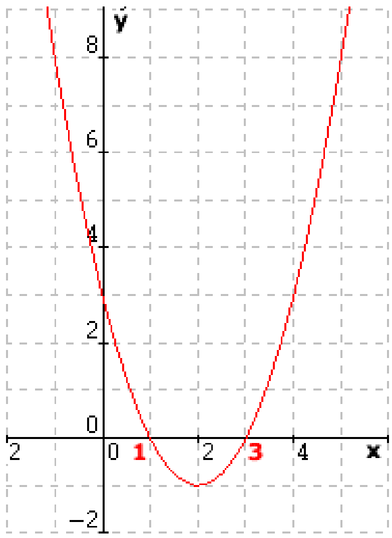
Denominam-se raízes da função do 2º grau os valores de x para os quais ela se anula.

$$y = f(x) = 0$$

Exemplo:

Na função $y = x^2 - 4x + 3$, que acima acabamos de determinar as coordenadas de seus vértices, as raízes da função serão x=1 e x`=3.

Vejamos o gráfico:



Notem que quando x = 1 e x`= 3, a parábola intercepta ("corta") o eixo x.

COMO DETERMINAR A RAIZ OU ZERO DA FUNÇÃO DO 2º GRAU?

Simplesmente aplicando a resolução de equações do 2º grau, já vista anteriormente.

Exemplo: determine a raiz da função $y = x^2 + 5x + 6$:

Fazendo **$y=f(x)=0$, temos $x^2 + 5x + 6 = 0$**

Agora basta resolver a equação aplicando a fórmula de Bháskara.

$x^2+5x+6=0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Acharemos que x = -2 e x` = -3.

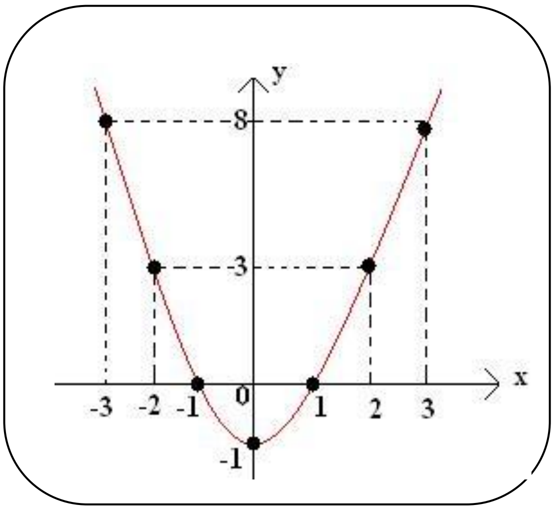
CONCAVIDADE DA PARÁBOLA

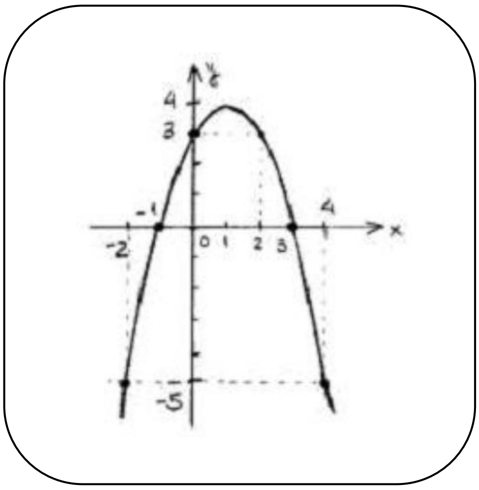
Explicarei esta parte com um simples desenho.

	
a>0	**a<0**

Os desenhos até que ficaram bonitinhos, mas isso não importa neste momento. O que nos importa agora é que quando a>0, a concavidade da parábola está voltada para cima (carinha feliz) e quando a<0, a parábola está voltada para baixo (carinha triste).

Exemplos:





Nota : Quando a concavidade está voltada para cima (a>0), o vértice representa o valor mínimo da função. Quando a concavidade está voltada para baixo (a<0), o vértice representa o valor máximo.

Quando o discriminante é igual a zero

Quando o valor de $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, **o vértice a parábola encontra-se no eixo x**. A coordenada y será igual a zero.

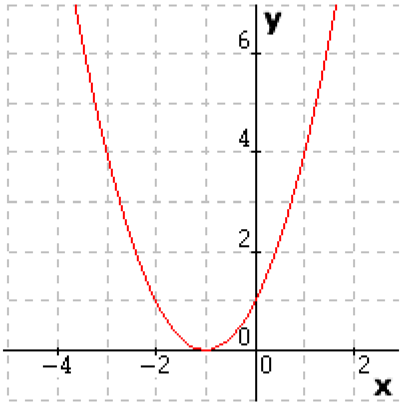
Exemplo: y = f(x) = x^2+2x+1

$x^2 + 2x + 1=0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (2)^2 - 4.1.1 = 4 - 4 = 0$$

x = x\` = $-\dfrac{b}{2a}$ = -1

As coordenadas do vértice serão V= (-1,0). Gráfico:



QUANDO O DISCRIMINANTE É MAIOR QUE ZERO

Quando o valor de $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, **a parábola intercepta o eixo x em dois pontos**. (São as raízes ou zeros da função vistos anteriormente).

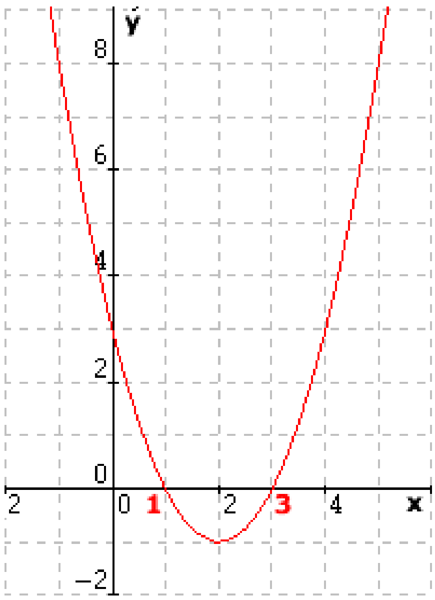
Exemplo: y = f(x) = x^2-4x+3

$x^2 - 4x + 3 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4.1.3 = 16 - 12 = 4 > 0$

x=1, x`=3

Gráfico:



Quando o discriminante é menor que zero

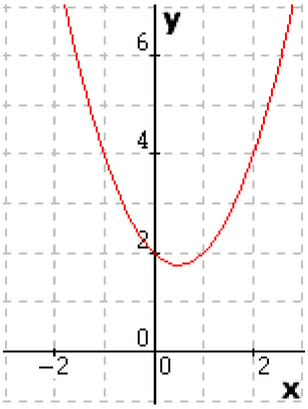
Quando o valor de $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, **a parábola não intercepta o eixo x**. Não há raízes ou zeros da função.

Exemplo: y = f(x) = x² - x + 2

$$x^2 - x + 2 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4.(1).(2) = 1 - 8 = -7 < 0$$

Gráfico:



CONSTRUINDO O GRÁFICO DA FUNÇÃO DO 2º GRAU

Para finalizarmos (ufa!), vamos desenhar o gráfico da função
y = -x ² - 4x – 3

1ª etapa: Raízes ou zeros da função

-x² - 4x - 3 = 0

Aplicando a fórmula de Bháskara

x=-1, x`=-3

2ª etapa: Coordenadas do vértice

- Coordenada x $= -\dfrac{b}{2a}$: $-\left(-\dfrac{4}{2.-1}\right) = \dfrac{4}{2} = 2$

- Coordenada y: Basta substituir o valor de x obtido na função

  y = -x² - 4x - 3 = -(-2)² - 4.(-2) - 3 = -4 + 8 - 3 = 1

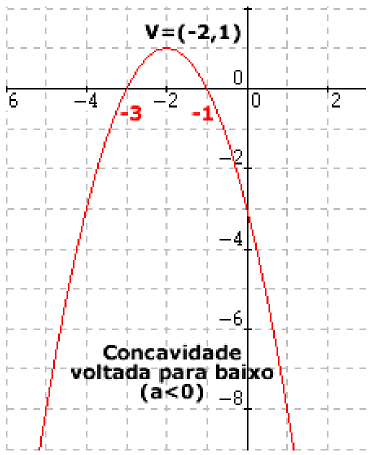
Portanto, V=(-2,1)

3ª etapa: Concavidade da parábola

y= - x² - 4x - 3

Como a = -1 < 0, a concavidade estará voltada para baixo

Feito isso, vamos esboçar o gráfico:



Imagem

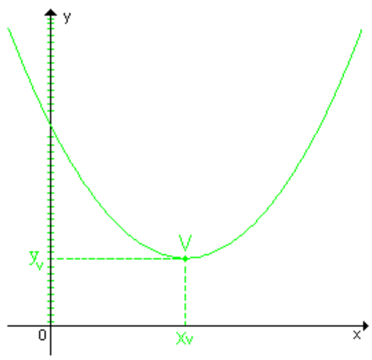
O conjunto - imagem ***Im*** da função y = $ax^2 + bx + c$, a ≠ 0, é o conjunto dos valores que y pode assumir. Há duas possibilidades:

1º - quando a > 0,

Na função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, quando a > 0, a parábola que a representa tem concavidade voltada para cima. Portanto:

- $V(x_v, y_v)$ é o ***ponto mínimo*** de f.
- $y_v = -\dfrac{\Delta}{4a}$ corresponde ao valor mínimo de f.
- O conjunto imagem de f é dado por:

$$Im = \left\{ y \in \mathbb{R} \,\middle|\, y \geq y_v = \frac{-\Delta}{4a} \right\}$$

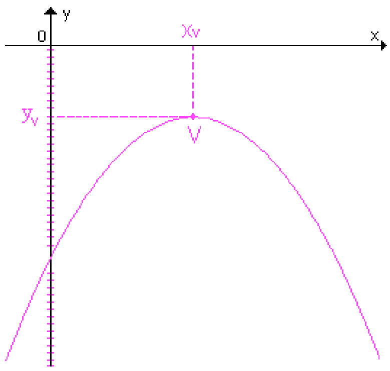


2º quando a < 0,

Na função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, quando $a > 0$, a parábola que a representa tem concavidade voltada para baixo. Portanto:

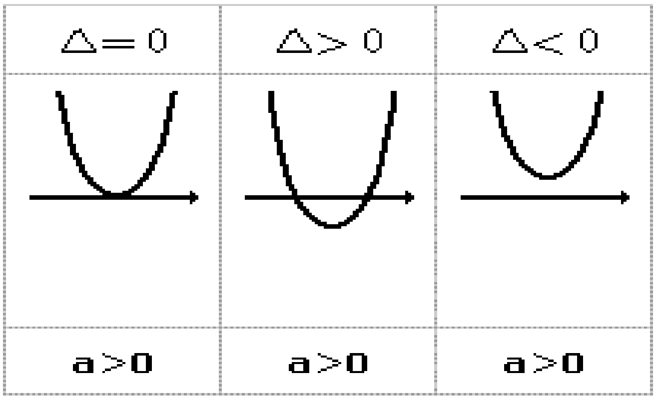
- $V(x_v, y_v)$ é o ***ponto máximo*** de f.
- $y_v = -\dfrac{\Delta}{4a}$ corresponde ao valor máximo de f.
- O conjunto imagem de f é dado por:

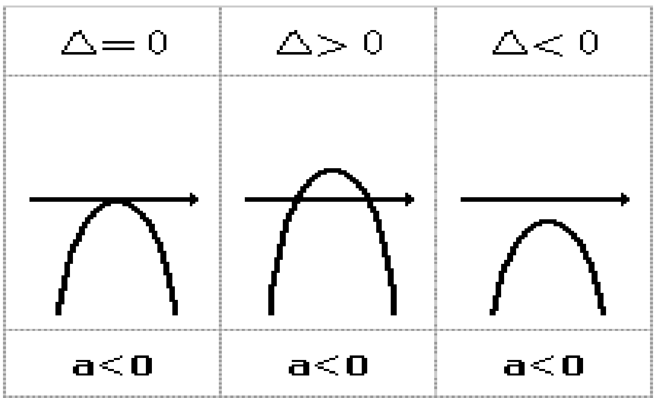
$$\text{Im} = \left\{ y \in \mathbb{R} \,\middle|\, y \le y_v = \frac{-\Delta}{4a} \right\}$$



a < 0

Resumindo:





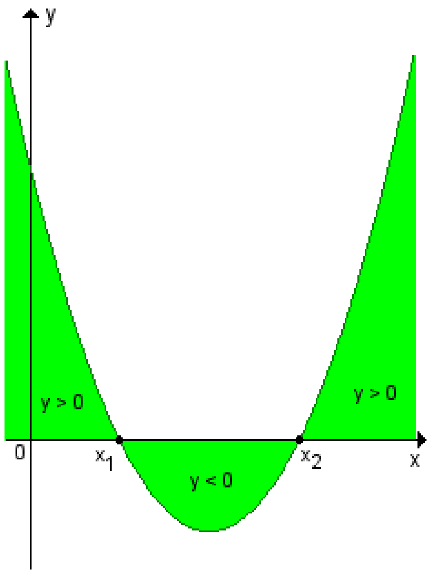
ESTUDO DO SINAL DE UMA FUNÇÃO QUADRÁTICA

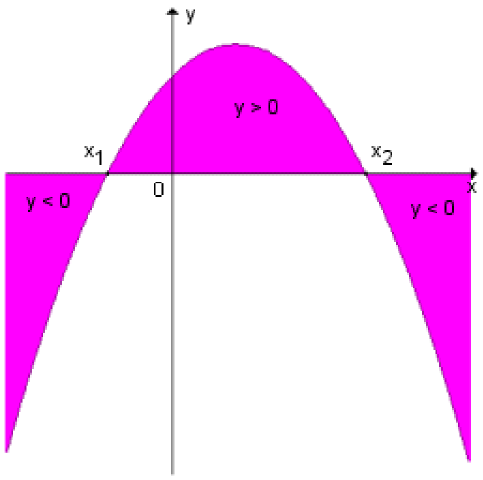
Consideramos uma função quadrática $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ e determinemos os valores de x para os quais y é negativo e os valores de x para os quais y é positivo.

Conforme o sinal do discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ podemos ocorrer os seguintes casos:

1º - $\Delta > 0$

Nesse caso a função quadrática admite dois zeros reais distintos ($x1 \neq x2$). A parábola intercepta o eixo Ox em dois pontos e o sinal da função é o indicado nos gráficos abaixo:





quando a > 0

$y > 0 \Leftrightarrow (x < x_1 \text{ ou } x > x_2)$
$y < 0 \Leftrightarrow (x < x_1 \text{ ou } x > x_2)$

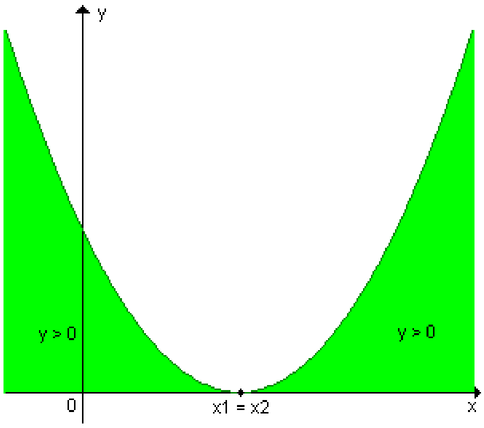
quando a < 0

$y > 0 \Leftrightarrow x_1 < x < x_2$
$y < 0 \Leftrightarrow (x < x_1 \text{ ou } x > x_2)$

Obs: em todos os casos de estudo de sinais, o y = 0 nas raízes encontradas.

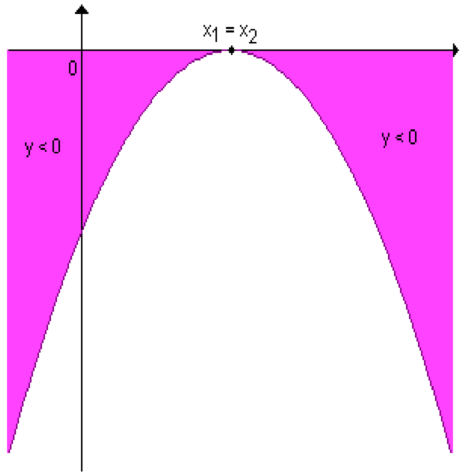
2º - $\Delta = 0$

Nesse caso a função quadrática admite dois zeros reais iguais ($x_1 = x_2$). A parábola intercepta o eixo Ox em um ponto e o sinal da função é o indicado nos gráficos abaixo:



quando a > 0

$$y > 0, \ \forall x \neq x_1$$
$$\nexists x \ \text{tal que} \ y < 0$$

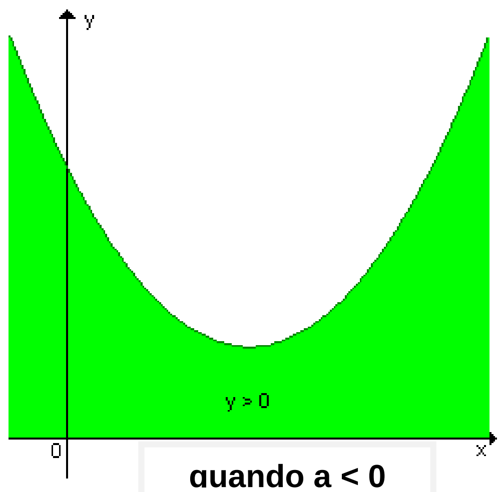


quando a < 0

$$y < 0, \ \forall x \neq x_1$$
$$\nexists x \ \text{tal que} \ y > 0$$

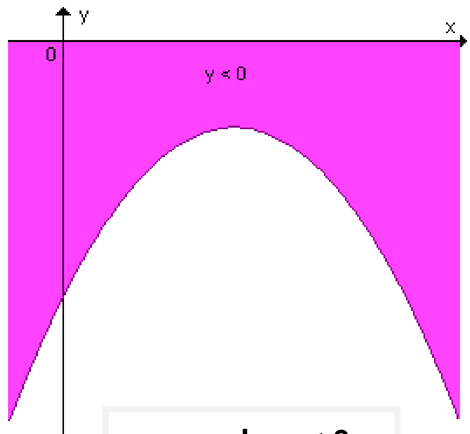
3º - $\Delta < 0$

Nesse caso a função quadrática não admite zeros reais. A parábola não intercepta o eixo Ox em nenhum ponto e o sinal da função é o indicado nos gráficos abaixo:



quando a < 0

$$y > 0, \ \forall x$$
$$\nexists \ x \ \text{tal que} \ \ y < 0$$



quando a < 0

$$y < 0, \ \forall x$$
$$\nexists \ x \ \text{tal que} \ \ y > 0$$

INEQUAÇÃO DE 2ª GRAU

As inequações são expressões matemáticas que utilizam, na sua formatação, os seguintes sinais de desigualdades:

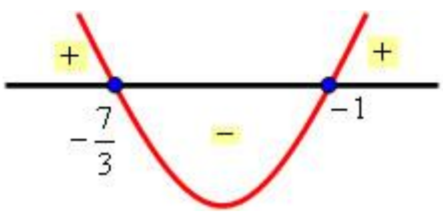
>: maior que
<: menor que
≥: maior ou igual
≤: menor ou igual
≠: diferente

As inequações do 2º grau são resolvidas utilizando o teorema de Bháskara. O resultado deve ser comparado ao sinal da inequação, com o objetivo de formular o conjunto solução.

Exemplo 1
Vamos resolver a inequação ***3x² + 10x + 7 < 0***.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\Delta = 10^2 - 4*3*7$$
$$\Delta = 100 - 84$$
$$\Delta = 16$$

$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{16}}{2*3}$$
$$x = \frac{-10 \pm 4}{6}$$
$$x' = \frac{-10+4}{6} = -\frac{6}{6} = -1$$
$$x'' = \frac{-10-4}{6} = -\frac{14}{6} = -\frac{7}{3}$$



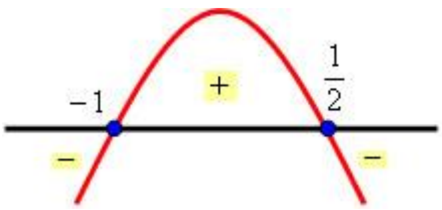
S = {x ∈ IR / –7/3 < x < –1}

Exemplo 2

Determine a solução da inequação $\boldsymbol{-2x^2 - x + 1 \leq 0}$.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\Delta = (-1)^2 - 4*(-2)*1$$
$$\Delta = 1 + 8$$
$$\Delta = 9$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2*(-2)}$$
$$x = \frac{1 \pm 3}{-4}$$
$$x' = \frac{1+3}{-4} = -\frac{4}{4} = -1$$
$$x'' = \frac{1-3}{-4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

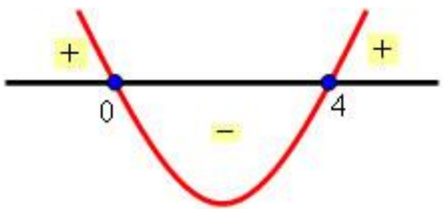


S = {x ∈ IR / x ≤ –1 ou x ≥ 1/2}

Exemplo 3

Determine a solução da inequação $\boldsymbol{x^2 - 4x \geq 0}$.

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{16}}{2*1}$$
$$x = \frac{4 \pm 4}{2}$$
$$x' = \frac{4+4}{2} = 4$$
$$x'' = \frac{4-4}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

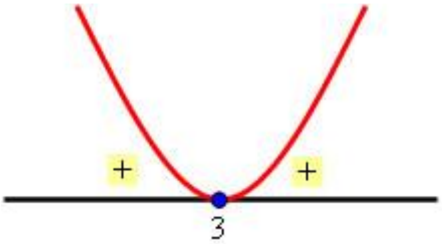


S = {x ∈ IR / x ≤ 0 ou x ≥ 4}

Exemplo 4

Calcule a solução da inequação ***x² – 6x + 9 > 0***.

$$\Delta = (-6)^2 - 4*1*9$$
$$\Delta = 36 - 36$$
$$\Delta = 0$$
$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{0}}{2*1}$$
$$x = \frac{6}{2}$$
$$x' = 3$$



S = {x ∈ IR / x < 3 e x > 3}

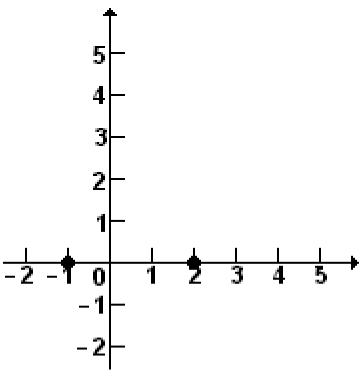
ATIVIDADE COMENTADA

1º) Esboce o gráfico da função $f(x) = x^2 - x - 2$

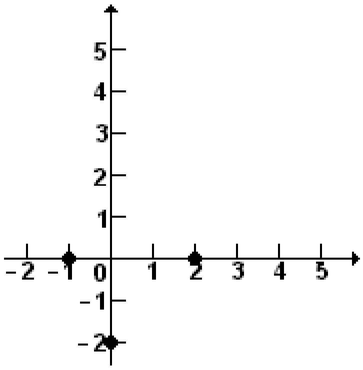
Vamos primeiro calcular as raízes usando Bhaskara. Os coeficientes são: *a=1, b=-1* e *c=-2.*Colocando na fórmula de Bhaskara, temos:

$$\frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$$

$$\frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \begin{cases} x' = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2 \\ x'' = \frac{1-3}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \end{cases}$$

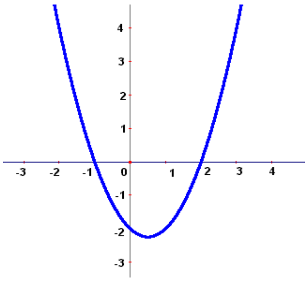


As duas raízes são *2* e *–1*, então já sabemos os pontos por onde a parábola corta o eixo X. No gráfico, fica:



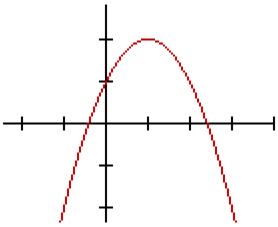
Agora fazemos o estudo dos coeficientes. Vamos primeiro olhar para o *"c"*. Ele vale –2, então o gráfico da parábola com certeza corta o eixo Y no ponto *–2*. Vamos marcá-lo:

Pelo coeficiente *"a"* sabemos que ela tem a concavidade para cima, e pelo *"b"* sabemos que logo após o ponto de corte com Y ela tem que descer. Traçando o esboço, temos o seguinte:



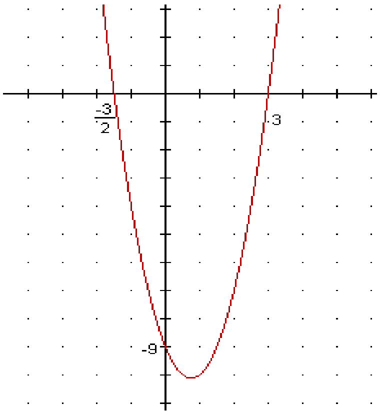
ATIVIDADE DE FIXAÇÃO

1) A representação cartesiana da função $y = ax^2 + bx + c$ é a parábola abaixo. Tendo em vista esse gráfico, podemos afirmar que:



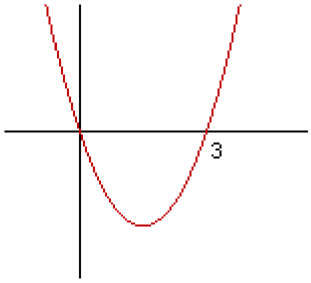
(A) a<0, b<0 e c>0
(B) a>0, b>0 e c<0
(C) a>0, b>0 e c>0
(D) a<0, b>0 e c<0
(E) a<0, b>0 e c>0

2) Qual a função que representa o gráfico seguinte?



(A) $y=2x^2+3x-9$
(B) $y=-2x^2+3x-9$
(C) $y=2x^2-3x-9$
(D) $y=-2x^2-3x-9$
(E) $y=2x^2+3x+9$

3) O valor mínimo do polinômio $y=x^2+bx+c$, cujo gráfico é mostrado na figura, é:



(A) -1

(B) -2

(C) $-\frac{9}{4}$

(D) $-\frac{9}{2}$

(E) $-\frac{3}{2}$

4) As soluções reais da desigualdade $x^2+1>2x$ são os números x, tais que

(A) $x \in \Re$
(B) $x \geq 1$
(C) $x>1$
(D) $x \neq 1$
(E) $x<1$

5) O movimento de um projétil, lançado para cima verticalmente, é descrito pela equação $y=-40x^2+200x$. Onde y é a altura, em metros, atingida pelo projétil *x* segundos após o lançamento. A altura máxima atingida e o tempo que esse projétil permanece no ar correspondem, respectivamente, a:

(A) 6,25 m, 5s
(B) 250 m, 0 s
(C) 250 m, 5s
(D) 250 m, 200 s
(E) 10.000 m , 5s

6) Considere a função $f:\Re\rightarrow\Re$, definida por $f(x)=ax^2+bx+c$, com $a<0$ e $c>0$. O gráfico de *f*

(A) não intercepta o eixo das abscissas
(B) intercepta o eixo horizontal em dois pontos, de abscissas negativa e positiva respectivamente
(C) intercepta o eixo das abscissas em um único ponto
(D) intercepta o eixo das abscissas em dois pontos, ambos positivos.
(E) intercepta o eixo das ordenadas em dois pontos.

7) A razão entre a soma e o produto das raízes da equação $2x^2-7x+3=0$

(A) $\frac{7}{3}$

(B) $\frac{7}{2}$

(C) $\frac{3}{2}$

(D) $\frac{3}{7}$

(E) $\frac{2}{7}$

8) A solução de $x-x^2>0$ é

(A) (0, 1)
(B) (-∞, 0)U(1, +∞)
(C) (-1, 1)
(D) (-∞, -1)U(1,+∞)
(E) R

9) Para que a parábola da equação $y = ax^2 + bx - 1$ contenha os pontos *(-2; 1)* e *(3; 1)*, os valores de a e b são, respectivamente,

(A) 3 e -3

(B) $\frac{1}{3}$ e $-\frac{1}{3}$

(C) 3 e $-\frac{1}{3}$

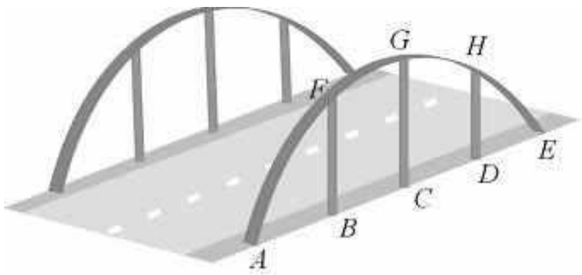
(D) $\frac{1}{3}$ e -3

(E) 1 e $\frac{1}{3}$

10) O vértice da parábola que corresponde à função $y = (x-2)^2 + 2$ é

(A) (-2, -2)
(B) (-2, 0)
(C) (-2, 2)
(D) (2, -2)
(E) (2, 2)

11) A figura ao lado ilustra uma ponte suspensa por estruturas metálicas em forma de arco de parábola.Os pontos A, B, C, D e E estão no mesmo nível da estrada e a distância entre quaisquer dois consecutivos é 25m. Sabendo-se que os elementos de sustentação são todos perpendiculares ao plano da estrada e que a altura do elemento central CG é 20m, a altura de DH é:



(A) 17,5m
(B) 15,0m
(C) 12,5m
(D) 10,0m
(E) 7,5m

GABARITO

01-E	04-D	07-A	10-E
02-C	05-C	08-A	11 - B
03-C	06-B	09-B	

REFERÊNCIAS

SOUZA, Joamir. ***Coleção Novo Olhar - Matemática***. Vol. 1. 1ªEdição.Editora FTD, 2011.

RIBEIRO, Jackson - **Ciência linguagem e tecnologia - Matemática**. Vol. 1. 1ªEdição.Editora Scipione, 2012.

DANTE, Luiz Roberto. ***Matemática***: ***contexto e aplicações***. Vol. Único. Editora Ática, 2009.

YOUSSEF, Antônio N., Soares, Elizabeth, Fernandez, Vicente Paz. **Matemática** –Vol. Único.1ªEdição. Ed. Scipione. São Paulo. 2011

PAIVA, Manoel. **Matemática** –Vol. Único.1ªEdição. Ed. Moderna. São Paulo. 2005

MÓDULO XI

UNIDADE II - FUNÇÕES

Objetivos

- Identificar os conhecimentos matemáticos como meios para compreender o mundo a sua volta;
- Resolver situações-problema, sabendo validar estratégias e resultados, desenvolvendo formas de raciocínio;
- Sentir-se seguro da própria capacidade de construir conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções;
- Comunicar-se matematicamente, ou seja, descrever, representar e apresentar resultados com precisão e argumentar suas hipóteses.
- Estabelecer uma conexão da matemática com a realidade cotidianaPromover a interdisciplinaridade entre disciplinas.

FUNÇÃO EXPONENCIAL

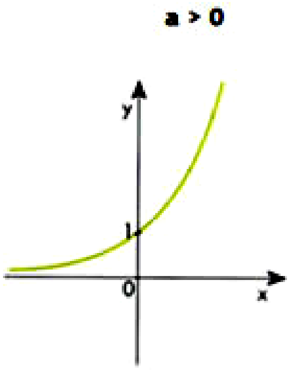
Toda relação de dependência, em que uma incógnita depende do valor da outra, é denominada função. A função denominada como exponencial possui essa relação de dependência e sua principal característica é que a parte variável representada por **x** se encontra no expoente. Observe:

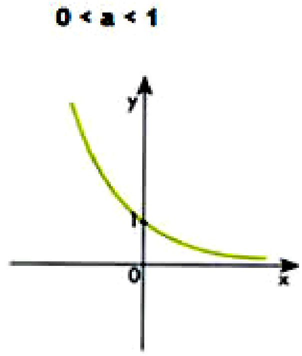
$y = 2^{x}$
$y = 3^{x+4}$
$y = 0{,}5^{x}$
$y = 4^{x}$

A lei de formação de uma função exponencial indica que a base elevada ao expoente x precisa ser maior que zero e diferente de um, conforme a seguinte notação:

f: IR $\rightarrow$ IR tal que $y = a^{x}$, sendo que $a > 0$ e $a \neq 1$.

Uma função pode ser representada através de um gráfico, e no caso da exponencial, temos duas situações: $a > 0$ e $0 < a < 1$. Observe como os gráficos são constituídos respeitando as condições propostas:



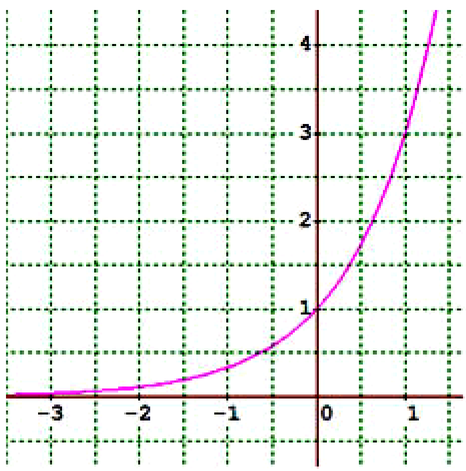


Toda função definida nos reais, que possui uma lei de formação com características iguais a **$f(x) = a^x$**, com a número real $a > 0$ e $a \neq 1$, é denominada função exponencial. Esse tipo de função serve para representar situações em que ocorrem grandes variações, é importante ressaltar que a incógnita se apresenta no expoente. As funções exponenciais se classificam em crescentes e decrescentes, de acordo com o valor do termo indicado por a.

FUNÇÃO EXPONENCIAL CRESCENTE – (A > 1)

Uma função exponencial é crescente quando o termo numérico representado por a for maior que um. Observe os ***domínios***, as respectivas imagens e o gráfico da função ***$f(x) = 3^x$***:

x	$f(x) = 3^x$
–4	$f(-4) = 3^{-4} = 1/81$
–3	$f(3) = 3^{-3} = 1/27$
–2	$f(-2) = 3^{-2} = 1/9$
–1	$f(-1)\ 3^{-1} = 1/2$
0	$f(0) = 3^0 = 1$
1	$f(1) = 3^1 = 3$
2	$f(2) = 3^2 = 9$
3	$f(3) = 3^3 = 27$
4	$f(4) = 3^4 = 81$

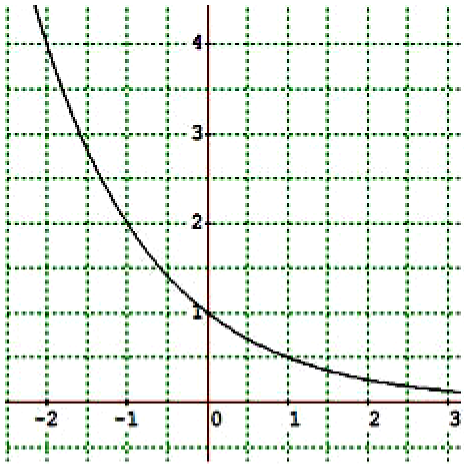


FUNÇÃO EXPONENCIAL DECRESCENTE – (0<A<1)

Função exponencial decrescente – (0 < a < 1)

As funções exponenciais decrescentes possuem o valor de a entre 0 e 1. Observe a tabela de valores pertencentes à função **f(x) =** $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ e seu respectivo gráfico:

x	$f(x) = (1/2)^x$
−4	$f(-4) = (1/2)^{-4} = 16$
−3	$f(-3) = (1/2)^{-3} = 8$
−2	$f(-2) = (1/2)^{-2} = 4$
−1	$f(-1) = (1/2)^{-1} = 2$
0	$f(0) = (1/2)^0 = 1$
1	$f(1) = (1/2)^1 = 1/2$
2	$f(2) = (1/2)^2 = 1/4$
3	$f(3) = (1/2)^3 = 1/8$
4	$f(4) = (1/2)^4 = 1/16$



Nas exponenciais podemos observar ***características comuns aos dois tipos de funções***:

- O gráfico não intercepta o eixo horizontal, portanto, a função não tem raízes.
- O gráfico corta o eixo vertical no ponto: x = 0 e y = 1.
- Os valores da ordenada (y) são sempre positivos, dessa forma o conjunto imagem constitui os números reais positivos com ausência do zero.

Uma função exponencial é utilizada na representação de situações em que a taxa de variação é considerada grande, por exemplo, em rendimentos financeiros capitalizados por juros compostos, no decaimento radioativo de substâncias químicas, desenvolvimento de bactérias e micro-organismos, crescimento populacional entre outras situações. As funções exponenciais devem ser resolvidas utilizando, se necessário, as regras envolvendo potenciação.

EXEMPLOS DE APLICAÇÕES DA FUNÇÃO EXPONENCIAL

Exemplo 1: Bactéria

Uma população de bactérias aumenta 50% em cada dia. Se no início da contagem havia 1 milhão de bactérias, quantas haverá ao fim de t dias?

Resolução:

Milhões de bactérias

Ao fim de 1 dia $1 + 0,5 = 1,5$

Ao fim de 2 dias $1,5 + 0,5x1,5 = 1,5(1 + 0,5) = 1,5^2$

Ao fim de 3 dias $1,5 + 0,5x1,5^2 = 1,5^2\,(1 + 0,5) = 1,5^3$

... ...

Ao fim de t dias .... $1,5^t$

Vemos que o número de milhões de bactérias, ao fim de t dias, é dado por uma potência de expoente variável (exponencial). Sabemos que esta potência tem significado para qualquer valor real de t; no início da contagem é $t = 0$ e antes desse instante é $t < 0$. Sabemos, também, que os valores de 1,5t são sempre positivos. Portanto, temos a correspondência:

$$f: IR \longrightarrow IR$$

$$t \longrightarrow 1,5^t$$

Que se chama **função exponencial de base 1,5**.

Exemplo 2: Juros compostos

A função exponencial intervém em numerosas aplicações matemáticas, na Ciência e na Indústria, e é indispensável no estudo de muitos problemas de Economia e Finanças, nomeadamente no cálculo dos "juros compostos". Diz-se que há um "juro composto" quando o juro ganho por certo capital, ao fim de um período de tempo, fica depositado, acrescentando o capital inicial e passando, portanto, a ganhar juro. O investigador, no fim do segundo ano, receberá, portanto, "juro do juro" além do juro do capital.

Por exemplo:

Uma pessoa coloca 3000 contos a prazo, à taxa de 20% ao ano e não levanta dinheiro algum durante 10 anos. Quanto tem a receber (capital acumulado) ao fim desse período? E ao fim de x anos?

Resolução:

Milhares de contos

Ao fim de 1 ano $3 + 3x0,2 = 3 (1 + 0,2) = 3x1,2$

Ao fim de 2 anos $3x1,2 + 3x1,2x0,2 = 3x1,2 (1 + 0,2) = 3x1,2^2$

Ao fim de 3 anos $3x1,2^2 + 3x1,2^2x0,2 = 3x1,2^3$

....

Ao fim de 10 anos $3x1,2^{10} \approx 18,575$

Ao fim de x anos $3x1,2^x$

Obtemos de novo uma **função exponencial**.

Exemplo 3

(Unit-SE) Uma determinada máquina industrial se deprecia de tal forma que seu valor, t anos após a sua compra, é dado por $\mathbf{v(t) = v_0 . 2^{-0,2t}}$, em que v_0 é uma constante real. Se, após 10 anos, a máquina estiver valendo R$ 12 000,00, determine o valor que ela foi comprada. Temos que v(10) = 12 000, então:

$v(10) = v_0 \, . \, 2^{-0,2.10}$

$12\,000 = v_0 \, . \, 2^{-2}$

$12\,000 = v_0 \, . \, 1/4$

$12\,000 : 1/4 = v_0$

$v_0 = 12\,000 \, . \, 4$

$v_0 = 48\,000$

A máquina foi comprada pelo valor de R$ 48 000,00.

Exemplo 4

Suponha que, em 2003, o PIB (Produto Interno Bruto) de um país seja de 500 bilhões de dólares. Se o PIB crescer 3% ao ano, de forma cumulativa, qual será o PIB do país em 2023, dado em bilhões de dólares?

Use $1{,}03^{20} = 1{,}80$.

Temos a seguinte função exponencial

$\mathbf{P(x) = P_0 \,.\, (1 + i)^t}$

$P(x) = 500 \,.\, (1 + 0{,}03)^{20}$

$P(x) = 500 \,.\, 1{,}03^{20}$

$P(x) = 500 \,.\, 1{,}80$

$P(x) = 900$

O PIB do país no ano de 2023 será igual a R$ 900 bilhões.

EQUAÇÃO EXPONENCIAL

Equações exponenciais são aquelas em que a incógnita se encontra no expoente de pelo menos uma potência. A forma de resolução de uma equação exponencial permite que as funções exponenciais sejam também resolvidas de forma prática. Esse tipo de função apresenta características individuais na análise de fenômenos que crescem ou decrescem rapidamente. Elas desempenham papéis fundamentais na Matemática e nas ciências envolvidas com ela, como: Física, Química, Engenharia, Astronomia, Economia, Biologia, Psicologia entre outras.

Toda equação que contém a **incógnita** no **expoente** é denominada **equação exponencial**. Vejamos alguns exemplos de equações exponenciais:

- $2^x = 8$
- $3^x = \frac{1}{243}$
- $7^{x-2} = 343^2$
- $3^{x+2} + 3^{x-2} = 82$
- $25^x - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$

Note que em todas estas equações a **incógnita** encontra-se no **expoente**.

Na resolução de equações exponenciais recorremos a muitas das propriedades da potenciação. Muitas vezes precisamos decompor um número em fatores primos para transformá-lo em uma potência que nos ajudará na resolução da equação. Em alguns casos, para solucioná-la, transformamos a equação exponencial em uma equação do primeiro grau, em outros as transformamos em uma equação do segundo grau. Vamos demonstrar como utilizar estes artifícios na resolução das cinco equações exponenciais abaixo:

SOLUCIONANDO EQUAÇÕES EXPONENCIAIS

1) Vamos começar com um ***caso bem simples***:

$$2^x = 8$$

Por experiência própria sabemos que **8** é igual a **2** elevado a **3**, então podemos escrever:

$$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \Rightarrow 8 = 2^3$$

Donde podemos concluir que o valor de **x** é **3**, pois:

$$2^x = 8 \Rightarrow 2^x = 2^3 \Leftrightarrow x = 3$$

Caso você não se lembre, podemos identificar que **8** é igual a **2^3**, o decompondo em fatores primos:

A técnica utilizada para solucionarmos esta equação foi escrever ambos os seus membros na forma de potências de mesma base, no caso a base **2**.

Já que as bases são iguais, no conjunto dos números reais as potências serão iguais se e somente se os expoentes também o forem. Mas note que isto só é válido se a base for **positiva** e diferente de **1**.

2) Agora vamos ao segundo exemplo que é ***ligeiramente diferente do primeiro***:

$$3^x = \frac{1}{243}$$

Decompondo o número 243 em fatores primos temos:

Então temos a seguinte equação com uma potência de **3** no denominador da fração no segundo membro:

$$3^x = \frac{1}{243} \Rightarrow 3^x = \frac{1}{3^5}$$

Das propriedades da potenciação sabemos que $\frac{1}{3^5}$ é igual a 3^{-5}, que nos leva ao seguinte:

$$3^x = \frac{1}{3^5} \Rightarrow 3^x = 3^{-5}$$

A partir daqui podemos concluir o valor de **x** da mesma forma que concluímos no exemplo anterior, pois chegamos nos dois membros a potências de mesma base e como a base é maior que zero e diferente de um, podemos concluir que:

$$3^x = \frac{1}{3^5} \Rightarrow 3^x = 3^{-5} \Leftrightarrow x = -5$$

1) Vamos agora solucionar o terceiro exemplo, que como veremos, também é bastante simples:

$$7^{x-2} = 343^2$$

A decomposição do número **343** em fatores primos nos leva a **7**^{3}:

O que nos leva a obter a equação:

$$7^{x-2} = 343^2 \Rightarrow 7^{x-2} = (7^3)^2$$

É sabido que podemos multiplicar os expoentes da potência $(7^3)^2$, o que resulta em 7^6, então a equação fica assim:

$$7^{x-2} = (7^3)^2 \Rightarrow 7^{x-2} = 7^6$$

Novamente chegamos em uma situação onde os dois membros da equação são potências de mesma base, portanto a resolveremos como nos casos anteriores, já que **7** é maior que **0** e diferente de **1**:

$$7^{x-2} = 7^6 \Leftrightarrow x - 2 = 6$$

Chegamos então à seguinte equação do primeiro grau:

$$x - 2 = 6$$

A resolvendo temos:

$$x - 2 = 6 \Rightarrow x = 6 + 2 \Rightarrow x = 8$$

1) Vamos ver agora um caso um pouco mais complexo:

$$3^{x+2} + 3^{x-2} = 82$$

Neste caso de nada adiantará decompormos o número **82** em fatores primos, pois os seus fatores **2** e **41** não nos ajudarão a chegar em uma potência de base **3** como nos termos do primeiro membro, além disto ainda temos uma operação de adição neste membro, que ajuda a complicar um pouco mais a resolução da equação da maneira que vimos até aqui.

Em situações como esta precisamos recorrer a outros artifícios, levando-se em consideração as propriedades da potenciação. Note que nesta equação temos dois termos com a incógnita no expoente. Nosso próximo passo é escrever estes termos na forma de um produto no qual um dos fatores seja uma potência com o expoente x, esta potência deverá ser a mesma em ambos os termos.

Já estudamos que na multiplicação de potências de mesma base obtemos como resultado uma potência desta base, cujo expoente é a soma dos expoentes das potências originais:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Então se invertermos este raciocínio podemos concluir que a potência 3^{x+2} pode ser escrita como $3^x \cdot 3^2$, pois ao somarmos **x** com **2** iremos obter o expoente **x + 2**:

$$3^x \cdot 3^2 = 3^{x+2} \Rightarrow 3^{x+2} = 3^x \cdot 3^2$$

Logo podemos reescrever a nossa equação como a seguir:

$$3^{x+2} + 3^{x-2} = 82 \Rightarrow 3^x \cdot 3^2 + 3^x \cdot 3^{-2} = 82$$

Em vez de trabalharmos com **3^x**, podemos trabalhar com **y**. Então a equação será:

Como chegamos a uma equação do primeiro grau, vamos obter o valor de **y** solucionando-a:

Como **$y = 3^x$** temos:

$$y = 9 \Rightarrow 3^x = 9$$

Agora não tem mais segredo, já que a base é positiva e diferente de **1**, basta procedermos como nos casos anteriores:

$$3^x = 9 \Rightarrow 3^x = 3^2 \Leftrightarrow x = 2$$

2) Finalmente vamos ao último caso:

$$25^x - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$$

A técnica utilizada será semelhante a do exemplo anterior, só que ao invés de chegarmos a uma equação afim, iremos obter uma equação quadrática:

Note que o primeiro termo 25^x pode ser escrito como $(5^2)^x$, ou como nos convém, escrevê-lo como $(5^x)^2$.

Então a equação ficará assim:

$$25^x - 6 \cdot 5^x + 5 = 0 \Rightarrow (5^x)^2 - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$$

Agora vamos ao artifício de substituir temporariamente **5^x** por **y**:

$$(5^x)^2 - 6 \cdot 5^x + 5 = 0 \Rightarrow y^2 - 6y + 5 = 0$$

Já que temos uma **equação do segundo grau**, vamos obter as suas raízes, através da fórmula de Bhaskara. Resolvendo a equação vamos encontrar os números **1** e **5**. Estes números são as raízes desta equação.

Voltando à vaca fria, como $\mathbf{5^x = y}$ temos:

$y = 1 \longrightarrow 5^x = 1$ como todo número elevado a zero é 1
$5^x = 5^0$ podemos trocá-lo por 5^0 para igualar
$x = 0$ as bases e resolver a equação.

$y = 5 \longrightarrow 5^x = 5$ como as bases estão iguais basta
$x = 1$ igualar os expoentes.

$S = \{0,1\}$

Mais algumas equações exponenciais resolvidas:

a) $2^{x+12} = 1024$
$2^{x+12} = 2^{10}$
$x + 12 = 10$
$x = 10 - 12$
$x = -2$

b) $2^{4x+1} * 8^{-x+3} = 16^{-1}$
$2^{4x+1} * 2^{3(-x+3)} = 2^{-4}$
$2^{4x+1} * 2^{-3x+9} = 2^{-4}$ $\longrightarrow$ aplicamos a propriedade da multiplicação de potencias de bases iguais
$4x + 1 - 3x + 9 = -4$
$4x - 3x = -1 - 4 - 9$
$x = -14$

c) $5^{x+3} * 5^{x+2} * 5^{x} = 125$
$5^{x+3} * 5^{x+2} * 5^{x} = 5^3$ $\longrightarrow$ aplicamos a propriedade da multiplicação de bases iguais
$x + 3 + x + 2 + x = 3$
$3x = 3 - 5$
$3x = -2$
$x = -2/3$

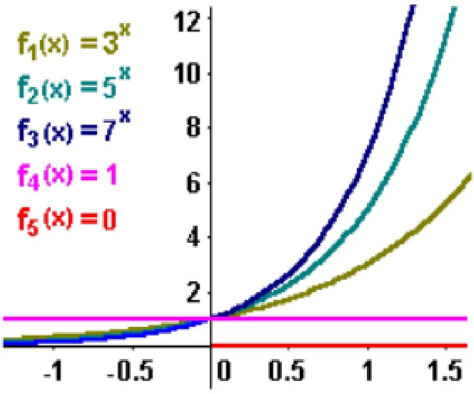
d) $2^{3x-2} * 8^{x+1} = 4^{x-1}$
$2^{3x-2} * 2^{3(x+1)} = 2^{2(x-1)}$
$3x - 2 + 3(x + 1) = 2(x - 1)$
$3x - 2 + 3x + 3 = 2x - 2$
$3x + 3x - 2x = -2 + 2 - 3$
$4x = -3$
$x = -3/4$

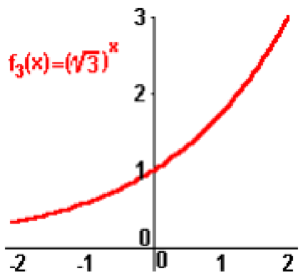
e) $2^{2x+1} . 2^{x+4} = 2^{x+2} . 32$
$2^{2x+1} . 2^{x+4} = 2^{x+2} . 2^5$
$2x + 1 + x + 4 = x + 2 + 5$
$2x + x - x = 2 + 5 - 1 - 4$
$2x = 2$
$x = 1$

ATIVIDADES COMENTADAS

1) Construir os gráficos das funções exponenciais:
a) $f(x) = 7^x$
b) $f(x) = 3^x$
c) $f(x) = \left(\sqrt{3}\right)^x$
d) $f(x) = 5^x$

Solução:





2) Determine o conjunto solução da equação $2^{2x} - 12.(2^x) = -32$

Com a substituição de $2^x = y$, vamos obter a equação do 2º grau:
$y^2 - 12y + 32 = 0$

Para resolver a equação vamos utilizar a fórmula de Bhaskara:
$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-12)^2 - 4.1.32$
$\Delta = 144 - 128$
$\Delta = 16$

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$y = \frac{12 \pm \sqrt{16}}{2.1} \qquad y' = \frac{12+4}{2} = \frac{16}{2} = 8$$

$$y = \frac{12 \pm 4}{2} \qquad y'' = \frac{12-4}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

Agora basta substituir, na expressão $y = 2^x$, para encontrar os valores de x:

$2^x = y$	$2^x = y$	
$2^x = 16$	$2^x = 8$	S = {3,4}
$2^x = 2^4$	$2^x = 2^3$	
$x = 4$	$x = 3$	

LOGARITIMO

DEFINIÇÃO:

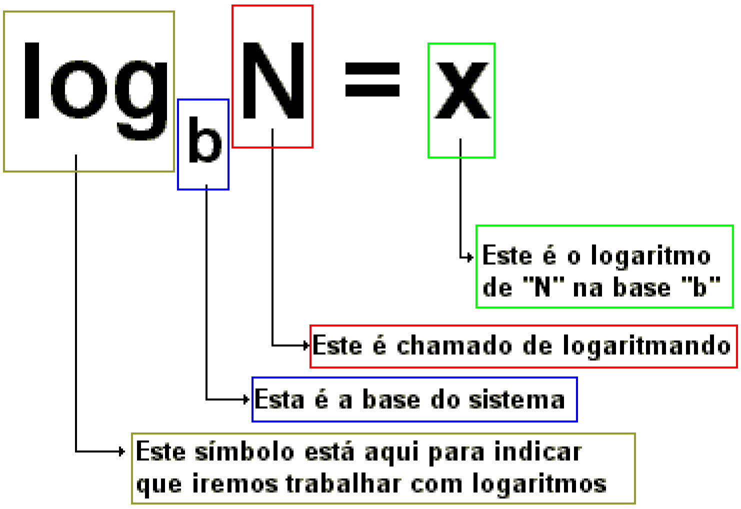
Sejam **a** e **b** números reais positivos diferentes de zero e $\mathbf{b \neq 1}$. Chama-se logaritmo de a na base **b** o expoente x tal que $\mathbf{\log_b N = x}$ $\mathbf{b^x = N}$**:**

Na sentença $\mathbf{\log_b N = x}$ temos:

a) **a** é o logaritmando;

b) **b** é a base do logaritmo;

c) **x** é o logaritmo de **a** na base **b**.



Note que, anteriormente, dissemos que *"x"* é o expoente de *"b"*, e na figura acima está escrito que "x" é o "logaritmo". Isso acontece pois o ***LOGARITMO É UM EXPOENTE***.

Agora, com esta breve introdução, podemos escrever uma primeira definção de logaritmo (hei, ainda não é a oficial, mas é o que temos até agora):

> Logaritmo de um número ***N***, na base ***b***, é o número ***x*** ao qual devemos elevar a base ***b*** para obtermos ***N***.

Esta é a apenas uma definição, você deve ter entendido bem o que está escrito acima dela para ir ao próximo capítulo de estudo.

Exemplos:

A) $log_5 25$ *é o expoente x tal que* $5^x = 25. Temos$:

$5^X = 25 \leftrightarrow 5^X = 5^2 \setminus x = 2.\ Assim, log_5 25 = 2.$

B) $log_9\ 1$ *é o expoente x tal que* $9^x = 1.\ Temos$:

$9x = 1 \leftrightarrow 9^x = 9^0 \setminus x = 0.\ Assim, log_9 1 = 0$

Observação:

1 - ***Quando a base não vier expressa, fica subentendido que esta vale 10***.

Exemplos:

a) log 3 = $\log_{10} 3$

b) log 20 = $\log_{10} 20$

CONDIÇÕES DE EXISTÊNCIA

Não podemos sair escrevendo logaritmo de qualquer número em qualquer base. Existem algumas regras para que o logaritmo exista, são as: **condições de existência dos logaritmos**.

Para mostrar quais são estas condições, vou dar um **EXEMPLO ERRADO** para cada restrição existente, para que você veja o absurdo que seria se elas não existissem.

Veja primeiro o exemplo abaixo:

Ex. 1: Quanto vale $\log_4(-16)$?

Ou seja, queremos saber qual o expoente que devemos elevar o número 4 para obtermos -16. Você viu no capítulo de potenciação que não há valor para este expoente. Chegamos então a um absurdo. Por causa deste tipo de absurdo, há uma restrição quanto ao sinal do logaritmando:

PRIMEIRA CONDIÇÃO DE EXISTÊNCIA (logaritmando):

O logaritmando deve ser um número positivo.
Veja que esta primeira restrição já inclui o fato de que o logaritmando deve ser diferente de ZERO. Duvida? Experimente encontrar o logaritmo de ZERO na base 3 ***($\log_3 0$)***.

Veja o próximo exemplo errado para ilustrar a próxima restrição:

Ex. 2: Quanto vale $\log_{(-4)} 4$?

Ou seja, queremos saber qual o expoente que devemos elevar o número -4 para obtermos 4. Novamente chegamos em um absurdo, não há expoente que faça isso.

Ainda olhando para a base:

Ex. 3: Calcule $\log_1 4$.

Queremos saber qual o expoente que devemos elevar a base 1 para obtermos 4. Como visto no capítulo de potenciação, a base 1 elevada a qualquer expoente resulta 1, ou seja, não existe expoente para a base 1 que resulte 4. Absurdo!

Ex. 4: Calcule $\log_0 4$.

Traduzindo, qual o expoente que devemos elevar a base 0 para obtermos 4. Absurdo!

Com estes três exemplos sobre a base do logaritmo, chegamos na segunda condição de existência.

$$\log_b N = x$$

1°	$N > 0$
2°	$b > 0$
3°	$b \neq 1$

SEGUNDA CONDIÇÃO DE EXISTÊNCIA (base): A base deve ser um número positivo diferente de 1.

Note que é dito que a base deve ser um número positivo, ou seja, não pode ser ZERO também.

Portanto, resumindo as três condições em um quadro só:

Tá, e você deve estar se perguntando: Como é que isso é cobrado? Uma maneira muito comum de aparecer nos exercícios é perguntando sobre o domínio de uma função com logaritmos.

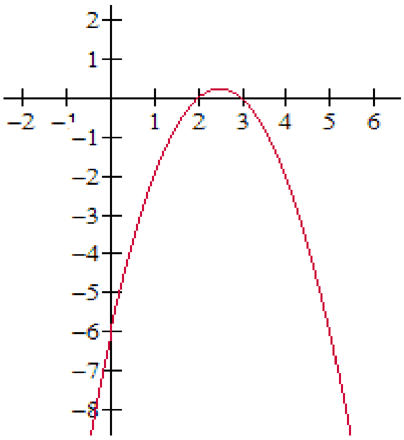
Lembrando que domínio é o conjunto dos números para os quais a função existe, devemos apenas aplicar as condições de existência no logaritmo para encontrar seu domínio. Veja o exemplo abaixo:

1) Qual o domínio da função real definida por $f(x)=\log_5(5x-x^2-6)$?

Vemos que a base já está definida, vale 5. Portanto, não devemos aplicar a condição de existência na base, somente no logaritmando.

$5x-x^2-6>0$ arrumando termos,

$-x^2+5x-6>0$ as raízes da função do segundo grau são 2 e 3 e o gráfico tem concavidade para baixo. Desenhando a parábola:



Portanto, os valores nos quais a parábola retorna valores positivos estão no intervalo entre 2 e 3. Este será o domínio: Domínio = $\{x \in \Re \mid 2<x<3\}$

Considerando a definição do logaritmo e todas condições de existência, existem algumas propriedades que os logaritmos sempre obedecem.

1° Consequência: $\log_b 1 = 0$

A pergunta feita por este logaritmo, é: Qual o expoente que devemos elevar a base *"b"* para obter 1? Como sabemos que qualquer número elevado à ZERO é um, então o logaritmo de 1 em qualquer base é ZERO também. Esta propriedade está provada.

Utilizando a equivalência fundamental para provar que resulta ZERO. Então vamos igualar a x:

$\log_b 1 = x$	**Aplicamos a equivalência fundamental**
$1 = b^x$	Agora devemos recordar que qualquer base elevada à ZERO resulta 1.
$x = 0$	

2° Consequência: $\log_b b = 1$

Qual o expoente que devemos elevar a base *"b"* para obtermos *"b"*? Se não houve modificação no número, então o expoente é 1.

Novamente, com a equivalência fundamental (agora um pouco mais sucinto):

$$\log_b b = x \ \rightarrow \ b = b^x \rightarrow x = 1$$

3°Consequência: $\log_a (a^m) = m$

Qual o expoente devemos elevar a base *a* para obtermos a^m? É uma pergunta quase óbvia, o expoente é *m*.

Equivalência fundamental:

$$\log_a (a^m) = x \ \rightarrow \ a^m = a^x \ \rightarrow \ x = m$$

4° Consequência: $a^{\log_a b} = b$

Esta é a mais importante das propriedades, e sua demonstração não é tão trivial assim.

Vou tentar mostrar com uma questão:

Qual o valor de x na expressão $x = 5^{\log_5 3}$**.**

Vamos substituir $\log_5 3$ por "y". Com isso teremos:

$y = \log_5 3$

$x = 5^y$

Aplicando a volta da equivalência fundamental:

$\log_5 x = y$

Agora, substituindo o valor original de "y":

$\log_5 x = \log_5 3$

Com isso podemos cortar os logaritmos de base 5 dos dois lados da igualdade.

$x = 3$

Assim, teremos a propriedade:

4° Consequência

$$\cancel{X}^{\log_{\cancel{X}} Y} = Y$$

Ou seja, quando tivermos uma potência, em forma de logaritmo com a mesma base desta potência, podemos cortar.

5°Consequência:

$$\log_a b = \log_a c \leftrightarrow b = c$$

Trocando em miúdos, podemos dizer que, quando temos um logaritmo de cada lado da igualdade, <u>ambos a mesma base</u>, podemos "cortar" os logaritmos e igualar os logaritmandos.

$$\cancel{\log_a} b = \cancel{\log_a} c$$
$$b = c$$

A demonstração começa aplicando a equivalência fundamental. Chamamos $\log_a c = y$

$\log_a b = y$	Aplicamos a equivalência fundamental
$b = a^y$	Agora voltamos a substituição $\log_a c = y$
$b = a^{\log_a c}$	Podemos então aplicar a 4° propriedade
$b = c$	Como queríamos demonstrar

Lembrando que o logaritmo é um expoente, podemos enunciar a equivalência fundamental dos logaritmos:

EQUIVALÊNCIA FUNDAMENTAL
$\log_b N = x \quad \leftrightarrow \quad N = b^x$
Note que temos, na expressão acima, exatamente as duas maneiras de mostrar a pergunta feita no início do estudo de logaritmos: "Qual o expoente *x* que devemos elevar a base *b* para resultar *N*".

Esta equivalência é muito importante, pois muitos exercícios sobre logaritmos necessitam dela para sua resolução. Veja, que, a flecha indicada nessa propriedade está nos dois sentidos, ou seja, você pode transformar logaritmo em exponencial e exponencial em logaritmos.

Vamos dar um exemplo de cada:

Ex. 1 - Qual o logaritmo de 216 na base 6?

Em outras palavras, podemos escrever esta pergunta como:

$$\log_6 216 = x$$

Onde *x* é o valor procurado, ou seja, o logaritmo elucidado no enunciado.

Agora, para resolver, aplicamos a equivalência fundamental:

$$\log_6 216 = x \quad \leftrightarrow \quad 216 = 6^x$$

Caímos em uma exponencial, para resolver devemos igualar as bases (como visto na lição anterior). Fatorando o $216 = 6^3$.

$6^3 = 6^x$ Cortando as bases

$x = 3$ Portanto, ***$\log_6 216 = 3$***

Ex. 2 - Qual o valor de "x" na equação $5^x = 6$?

Estamos perguntando: "Qual o expoente x que devemos elevar a base 5 para resultar 6 ?". Aplicando a "volta" da equivalência fundamental podemos escrever esta igualdade como sendo:

$$5^x = 6 \quad \leftrightarrow \quad x = \log_5 6$$

Este é o valor de x

Ex. 2 (UFRGS) A forma exponencial da igualdade $\log_a b = c$ é:

(A) $a = b^c$
(B) $b = a^c$
(C) $c = b^a$
(D) $b = c^a$
(E) $c = a^b$

Esta é só aplicar a equivalência fundamental.

$$b = a^c$$

Resposta correta, letra "B".

Veja agora alguns exemplos de aplicação da equivalência fundamental:

$\log_5 625$	Este é o logaritmo que queremos saber. Primeiro de tudo devemos igualar a "x".
$\log_5 625 = x$	Agora é só usar a equivalência fundamental
$625 = 5^x$	Caímos em uma equação exponencial. Vamos fatorar!
$5^4 = 5^x$	Bases igualada é só cortar.
$x = 4$	Esta é a resposta: $\log_5 625 = 4$

Mais um exemplo:

$\log_3 243$	**Sempre, o que devemos fazer primeiro é igualar a "x".**
$\log_3 243 = x$	Aplicando a equivalência fundamental.
$243 = 3^x$	Esta é uma exponencial. Fatorando.
$3^5 = 3^x$	Cortando as bases
$x = 5$	Esta é a resposta: $\log_3 243 = 5$

Mais um exemplo nunca é demais:

$\log_{25}(0{,}2)$	**Igualando a "x".**
$\log_{25}(0{,}2) = x$	Aplicando a equivalência fundamental.
$0{,}2 = 25^x$	Agora para facilitar o cálculo, vamos transformar o número decimal em fração e fatorar o que der.
$\frac{1}{5} = (5^2)^x$	Aplicando as propriedades de potenciação.
$5^{-1} = 5^{2x}$	Cortando as bases.
$-1 = 2x$ $x = -\frac{1}{2}$	Esta é a resposta: $\log_{25}(0{,}2) = -\frac{1}{2}$

Esta é a técnica para se calcular o valor do logaritmo de algum número em uma base definida.

PROPRIEDADES OPERATÓRIAS DOS LOGARITMOS

Os logaritmos possuem inúmeras aplicações no cotidiano, a Física e a Química utilizam as funções logarítmicas nos fenômenos em que os números adquirem valores muito grandes, tornando-os menores, facilitando os cálculos e a construção de gráficos. O manuseio dos logaritmos requer algumas propriedades que são fundamentais para o seu desenvolvimento. Veja:

1***)* Propriedade do produto do logaritmo**

1°Propriedade: $\log_b(A \cdot B) = \log_b A + \log_b B$

Exemplo:
$\log_2(32 \,.\, 16) = \log_2 32 + \log_2 16 = 5 + 4 = 9$

2) Propriedades do quociente do logaritmo

2° Propriedade: $\log_b\left(\frac{A}{B}\right) = \log_b A - \log_b C$

Exemplo:
$\log_5(625/125) = \log_5 625 - \log_5 125 = 4 - 3 = 1$

***3*) Propriedade da potência do logaritmo**

3° Propriedade: $\log_b(A^n) = n \cdot \log_b A$

Exemplo:
$\log_3 81^2 = 2 \,.\, \log_3 81 = 2 \,.\, 4 = 8$

ATIVIDADE COMENTADA

1) (UFRGS) A raiz da equação $2^x = 12$ **é**

(A) 6 **(B)** 3,5 **(C)** $\log 12$
(D) $2\log_2 3$ **(E)** $2+\log_2 3$

Começamos aplicando a volta da equivalência fundamental:

$$x = \log_2 12$$

Agora vemos que esta resposta não está nas alternativas. Portanto, devemos fatorar o 12:

$$x = \log_2 (4\cdot 3)$$

Aplicamos a 1° Propriedade Operatória

$$x = \log_2 4 + \log_2 3$$

Mas o $\log_2 4$ sabemos que vale 2. Portanto:

$$x = 2+\log_2 3$$

Resposta correta, letra "E".

2) (UCS) Se $\log 2 = a$ **e** $\log 3 = b$**, então** $\log 12$ **vale**

(A) $a+b$
(B) $2a+b$
(C) $a+2b$
(D) $a\cdot b$
(E) $\frac{a}{b}$

Este tipo de questão é clássico nos vestibulares do Brasil. Peguei este exemplo pois não possui muita dificuldade. Começamos fatorando sempre o logaritmo pedido, neste caso o 12.

$$\log 12$$

$$\log(2^2\cdot 3)$$

Agora devemos aplicar as propriedades operatórias: $\log 2^2 + \log 3$

$2\log 2 + \log 3$

E substituímos os valores dados no enunciado:

2a+b, Resposta correta, letra "B".

ATIVIDADE DE FIXAÇÃO

1) Calcule o valor dos seguintes logaritmos:

a) $\log_{16} 64$ b) $\log_{625} \sqrt{5}$

c) $\log_5 (0{,}000064)$ d) $\log_{49} \sqrt[3]{7}$

e) $\log_{(\sqrt[5]{2})} 128$ f) $\log_9 (3\sqrt{3})$

g) $\log_2 (\sqrt[8]{64})$ h) $\log_2 0{,}25$

2) Calcule o valor da incógnita *"N"* em cada exercício, aplicando a equivalência fundamental:

a) $\log_5 N = 3$ b) $\log_2 N = 8$ c) $\log_2 N = -9$ d) $\log_{\sqrt{3}} N = 2$

3) Calcule o valor da incógnita *"a"* em cada exercício, aplicando a equivalência fundamental:

a) $\log_a 81 = 4$ b) $\log_a 1024 = 20$ c) $\log_a 10 = 2$ d) $\log_{9a} \sqrt{27} = \frac{1}{2}$

4) O número real x, tal que $\log_x \left(\frac{9}{4}\right) = \frac{1}{2}$, é

(A) $\frac{81}{16}$

(B) $-\frac{3}{2}$

(C) $\frac{1}{2}$

(D) $\frac{3}{2}$

(E) $-\frac{81}{16}$

5) (PUCRS) Escrever $b^{log_b a} = b^{-2}$, equivale a escrever

(A) $a = \frac{1}{b^2}$
(B) $b = a^2$
(C) $a = b^2$
(D) $b^2 = -a$
(E) $b = \frac{1}{a^2}$

6) Se $f(x) = \log_{10}\left(\frac{x^2}{x+11}\right)$, o valor de $f(-1)$ é:

(A) -2
(B) -1
(C) 0
(D) 1
(E) 2

7) (PUCRS) A solução real para a equação $a^{(x+1)} = \frac{b}{a}$, com a>0, a≠1 e b>0, é dada por

(A) $\log_a b$
(B) $\log_a(b+1)$
(C) $\log_a(b)+1$
(D) $\log_a(b)+2$
(E) $\log_a(b)-2$

GABARITO

1 -
a) $\frac{3}{2}$
b) $\frac{1}{2}$
c) – 6
d) $\frac{1}{6}$
e) 35

f) $\frac{3}{2}$
g) -2

2 -

a) 125
b) 256
c) $\frac{1}{512}$
d) 3

3 -
a) $\sqrt{2}$
b) $\sqrt{10}$
c) 3

04 - A	05 - A	06 - B	07 - E

MUDANÇA DE BASE

Em algumas questões, pode ser apresentado um logaritmo que possui uma base não muito boa para a resolução da questão. Nestas situações é necessário que troquemos a base do logaritmo! Neste capítulo iremos aprender o que fazer para colocarmos qualquer base que quisermos no logaritmo da questão.

A regra é a seguinte:

Mudança de Base
$\log_b a = \dfrac{\log_c a}{\log_c b}$

Ou seja, se tivermos um logaritmo na base *b*, podemos transformar em uma fração de logaritmos em uma outra base qualquer *c*.

$\log_b a = \dfrac{\log_c a}{\log_c b}$	a base nova "c", pode ser qualquer número que satisfaça a condição de existência da base, ou seja, c > 0 e c ≠ 1.

Por exemplo, seja o logaritmo de 45 na base 3: $\log_3 45$. Mudando para a base 7, teremos: $\frac{\log_7 45}{\log_7 3}$. Poderíamos ter colocado qualquer outra base *c* no lugar do 7.

Podemos provar essa propriedade partindo da fração. Vamos igualar a fração a x e encontrar o valor de x.

$$\frac{\log_c a}{\log_c b} = x$$

$$\log_c a = x \cdot \log_c b$$

Vamos aplicar uma base c de potência nos dois lados da igualdade:

$$c^{\log_c a} = c^{(x \cdot \log_c b)}$$

Agora podemos aplicar a 4° consequência da definição no lado esquerdo e rescrever a potência do lado direito:

$$a = \left[c^{(\log_c b)}\right]^x$$

E aplicar novamente a 4° consequência, agora no lado direito:

$$a = [b]^x$$

Com a equivalência fundamental:

$$\log_b a = x$$

Que é exatamente o valor que queríamos chegar.

ATIVIDADE COMENTADA

(UFRGS) Sabendo que $\log a = L$ **e** $\log b = M$ **, então o logaritmo de a na base b é**

(A) $L+M$
(B) $L-M$
(C) $L \cdot M$

(D) $\frac{M}{L}$

(E) $\frac{L}{M}$

É dado o valor do logaritmo de a na base 10 e é pedido o logaritmo de a na base b.

Para adequar o pedido ao informado, vamos transformar o $\log_b a$ para a base 10.

$$\log_b a = \frac{\log a}{\log b}$$

Este valor encontrado possui termos que foram dados no enunciado, portanto, podemos substituir:

$$\log_b a = \frac{L}{M}$$

Esta propriedade de mudança de base gera algumas consequências legais de sabermos para resolver equações envolvendo logaritmos.

ATIVIDADE DE FIXAÇÃO

1) O valor de $(\sqrt{2})^{\log_{\sqrt{2}}\sqrt{3}}$ é

(A) $\sqrt{3}$
(B) $\sqrt{2}$
(C) $\sqrt{6}$
(D) 2
(E) 2^3

2) Se $\log(2)=a$ e $\log(3)=a+b$, então $\log\sqrt[3]{54}$ é

(A) $4a+b$
(B) $12a+3b$
(C) $\frac{a+4b}{3}$
(D) $\frac{4a+3b}{3}$
(E) $\frac{4a+b}{3}$

3) Se $\log(a)=4$ e $\log(b)=1$, então $\log\sqrt[3]{\frac{a^3}{b}}$ é igual a

(A) $\frac{1}{5}$
(B) $\frac{11}{3}$
(C) $\sqrt{3}$
(D) 3
(E) 5

4) A solução da equação $8^{\log_8 x}.8^{\log_8 4x}=1$ pertence ao intervalo

(A) $[-2,0)$
(B) $[-\frac{1}{2},0)$
(C) $[0,\frac{1}{2})$
(D) $[\frac{1}{4},\frac{1}{2}]$
(E) $[2,4]$

5) Dado $\log 5 = P$, calcule o valor de $\log 200$ em função de P

(A) $5P$

(B) $200P$

(C) $P-3$

(D) $3-P$

(E) $5-P$

6) A solução para o sistema de equações:

$$\begin{cases} x+y=13 \\ \log(x)+\log(y)=\log(36) \end{cases}$$

é

(A) (7, 6)

(B) (6, 7)

(C) (9, 4)

(D) (1, 12)

(E) (0, 36)

GABARITO

01 - A	02 - D	03 - B	04 - D	05 - D	06 - C

EQUAÇÕES LOGARÍTMICAS

Agora que já estudamos todas as propriedades dos logaritmos, podemos ver como aplicá-las na resolução de equações logarítmicas.

Equações logarítmicas são quaisquer equações que tenham a incógnita (normalmente é x) dentro de um símbolo ***log***.

Para resolver este tipo de equação não existe um mecanismo geral, algo que dê pra dizer, aplique isso e você acertará.

Uma regra que deve sempre ser seguida ao terminar a resolução de uma equação logarítmica, é a seguinte:

Todas as soluções encontradas devem ser TESTADAS na equação ORIGINAL, a fim de verificar as condições de existência.

As soluções que não satisfizerem as condições de existência devem ser DESCARTADAS!

Portanto, para aprendermos a resolver equações logarítmicas, vamos dar uma olhada em algumas questões chave.

ATIVIDADE COMENTADA

01) O conjunto solução da equação logarítmica $\log_4(x+x^2)=\frac{1}{2}$ é:

(A) {-1; 2}
(B) {-2; 1}
(C) {-2}
(D) {1}
(E) { }

Começamos aplicando apenas a equivalência fundamental:

$$x+x^2=4^{\frac{1}{2}}$$

$$x+x^2=2$$

$x^2+x-2=0$

Agora é só aplicar a fórmula de Bhaskara.

Chegando no valor de x devemos TESTAR AS SOLUÇÕES, como dito na única regra de resolução de equações logarítmicas.

Verificação, para $x=1$: $\log_4(1+1^2) \rightarrow \log_4 2=\frac{1}{2}$, OK

para $x=-2$: $\log_4[-2+(-2)^2] \rightarrow \log_4 2=\frac{1}{2}$, OK

2) O número real x que satisfaz a equação $\log_2(12-2^x)=2x$ é:

(A) $\log_2 5$
(B) $\log_2 \sqrt{3}$
(C) 2
(D) $\log_2 \sqrt{5}$
(E) $\log_2 3$

Aplicamos a equivalência fundamental:

$12-2^x=2^{2x}$

$2^{2x}+2^x-12=0$

$(2^x)^2+2^x-12=0$

Agora caímos em uma equação exponencial do tipo II. Efetuando a troca de variáveis $2^x=y$, temos:

$y^2+y-12=0$

Aplicamos Bhaskara e chegamos em:

$y=-4 \quad \text{e} \quad y=3$

Agora voltamos para x utilizando novamente a troca de variáveis feita inicialmente $2^x=y$:

$2^x=-4$ Absurdo!

$2^x = 3$ Aplicamos a equivalência fundamental,

$x = \log_2 3$

Agora devemos testar esta solução na equação original do enunciado. Substituindo este valor de x na equação:

$\log_2(12 - 2^{\log_2 3})$

Aplicamos a *4° conseqüência da definição do logaritmo:*

$\log_2(12-3)$

$\log_2 9$

$\log_2 3^2$

Aplicamos a *3° propriedade operatória*

$2\log_2 3$, OK. É válida!

Resposta correta, letra "E".

3) A equação $\log_3 x = 1 + \log_x 9$ tem duas raízes reais. O produto dessas raízes é:

(A) 0
(B) $\frac{1}{3}$
(C) 9
(D) 6
(E) 3

Esta equação já envolve um truquezinho, igual às *equações exponenciais do tipo II.*

Começamos vendo que o *9* na equação pode virar *3²*.

$\log_3 x = 1 + \log_x(3^2)$

E aplicamos a *3° propriedade operatória:*

$\log_3 x = 1 + 2\log_x 3$

O pulo do gato vem agora. Devemos ver que os dois logaritmos envolvidos na equação acima são um o inverso do outro (*1° consequência da mudança de base).*

$$\log_3 x = 1 + 2 \cdot \frac{1}{\log_3 x}$$

$$\log_3 x = 1 + \frac{2}{\log_3 x}$$

Agora devemos mudar a variável. Efetuamos a troca $\log_3 x = y$:

$$y = 1 + \frac{2}{y}$$

Podemos multiplicar ambos os lados por y, ou efetuar MMC, tanto faz. Chegamos em:

$$y^2 = y + 2$$

$$y^2 - y - 2 = 0$$

Aplicamos *Bhaskara* e chegamos em $y = 2 \;\; \text{ou} \;\; y = -1$. Estes são os valores de y, o exercício quer os valores de x. Portanto, utilizamos a troca inicial novamente:

$$\log_3 x = y$$

para y=2: $\log_3 x = 2 \rightarrow x = 3^2 \rightarrow x = 9$

para y=-1: $\log_3 x = -1 \rightarrow x = 3^{-1} \rightarrow x = \frac{1}{3}$

O produto destes dois valores (como pedido no enunciado) é $9 \cdot \frac{1}{3} = 3$. Resposta, letra "E".

4) (UFRGS) A solução da equação $\log_2(4-x) = \log_2(x+1) + 1$ está no intervalo:

(A) [-2; -1]
(B) (-1; 0]
(C) (0; 1]
(D) (1; 2]
(E) (2; 3]

Esta equação devemos apenas trazer todos os logs para o mesmo lado da igualdade e aplicar as propriedades operatórias:

$$\log_2(4-x)-\log_2(x+1)=1$$

Aplicamos a *2° propriedade operatória dos logaritmos:*

$$\log_2\left(\frac{4-x}{x+1}\right)=1$$

Aplicamos a *equivalência fundamental*:

$$\frac{4-x}{x+1}=2^1$$

$$4-x=2\cdot(x+1)$$

$$4-x=2x+2$$

$$x=\frac{2}{3}$$

Agora testamos na equação original (do enunciado) para ver as *condições de existência*. Para isso, substituímos o valor de x encontrado na equação do enunciado:

$$\log_2(4-\tfrac{2}{3})=\log_2(\tfrac{2}{3}+1)+1$$

$$\log_2(\tfrac{10}{3})=\log_2(\tfrac{5}{3})+1$$

Neste momento não precisamos continuar, só o que devemos saber é que, ao substituir o valor de x, não encontramos nenhuma falha nas condições de existência dos logaritmos envolvidos. Portanto, a resposta é $\frac{2}{3}=0{,}6666...$ mesmo

Este valor encontra-se entre 0 e 1. Resposta correta, letra "C".

Outros exemplos de equações logarítmicas:

1) Equação que envolve a igualdade entre dois logaritmos de mesma base.

$$\log_a x = \log_a y$$

A solução é dada fazendo x = y > 0

Exemplo: Resolva a equação

$$\log_5 2x + 4 = \log_5 3x + 1.$$

Solução: temos que

2x + 4 = 3x + 1

2x – 3x = 1 – 4

– x = – 3

x = 3

Portanto, S = { 3 }

2) Equação que envolve a igualdade entre um logaritmo e um número.

$\log_a x = c$

A solução é dada por $x = a^c$.

Exemplo: Encontre a solução da equação

$\log_3 5x + 2 = 3.$

Solução: Pela definição de logaritmo temos:

$5x + 2 = 3^3$

5x + 2 = 27

5x = 27 – 2

5x = 25

x = 5

Portanto S = {5}.

3) Equação que é necessário fazer uma mudança de incógnita.

Exemplo: Resolva a equação

$(\log_4 x)^2 - 3 \cdot \log_4 x = 4$

Solução: Vamos fazer a seguinte mudança de incógnita $\log_4 x = y.$

Substituindo na equação inicial, ficaremos com:

$$y^2 - 3y = 4$$

ou

$$y^2 - 3y - 4 = 0$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 25$$

$$y = \frac{-(-3) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1}$$

$$y = 4 \; ou \; y = -1$$

Como $\log_4 x = y$, então:

$$\log_4 x = 4 \rightarrow x = 4^4 \rightarrow x = 256$$

Ou

$$\log_4 x = -1 \rightarrow x = 4^{-1} = \frac{1}{4}$$

Portanto, $S = \{\frac{1}{4}, 256\}$

3) Equações que utilizam as propriedades do logaritmo ou de mudança de base.

Exemplo: Resolva a equação

$$\log(2x+3) + \log(x+2) = 2\log x$$

Solução: usando as propriedades do logaritmo, podemos reescrever a equação acima da seguinte forma:

$$\log[(2x+3)(x+2)] = \log x^2$$

Note que para isso utilizamos as seguintes propriedades:

$$\log x \cdot y = \log x + \log y$$
$$\log x^n = n \cdot \log x$$

Vamos retornar à equação:

$$\log[(2x+3)(x+2)] = \log x^2$$

4) Como ficamos com uma igualdade entre dois logaritmos, segue que:

$(2x + 3)(x + 2) = x^2$

ou

$2x^2 + 4x + 3x + 6 = x^2$

$2x^2 - x^2 + 7x + 6 = 0$

$x^2 + 7x + 6 = 0$

$$\Delta = 7^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-7 \pm 5}{2}$$

x = -1 ou x = - 6

Lembre-se que para o logaritmo existir o logaritmando e a base devem ser positivos. Com os valores encontrados para x, o logaritmando ficará negativo. Sendo assim, a equação não tem solução ou S = ∅

PROPRIEDADE DE MUDANÇA DE BASE

Existem situações nas quais precisaremos utilizar a tábua de logaritmos ou uma calculadora científica na determinação do logaritmo de um número. Mas para isso devemos trabalhar o problema no intuito de estabelecer o logaritmo na base 10, pois as tábuas e as calculadoras operam nessas condições, para isso utilizamos a propriedade da mudança de base, que consiste na seguinte definição:

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$$

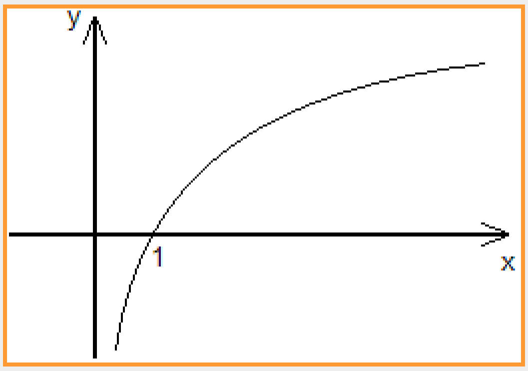
Exemplo

$$\log_5 8 = \frac{\log 8}{\log 5} = \frac{0,90309}{0,69898} = 1,292$$

FUNÇÃO LOGARÍTMICA

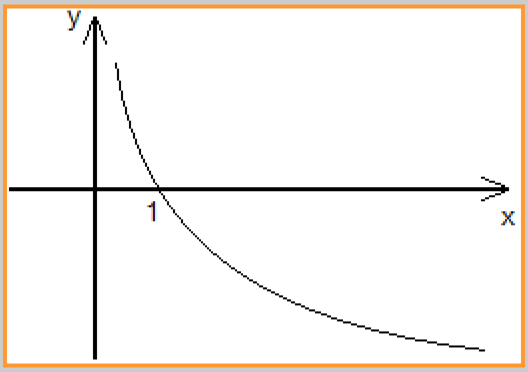
A representação gráfica da função logarítmica deve ser gravada por todos. Várias questões de vestibular exigem este conhecimento. A representação gráfica de um logaritmo pode ser de duas formas. Veja os gráficos abaixo mostrando as duas formas para a função $y = \log_b x$:

CRESCENTE



base **b** > **1**

DECRESCENTE



base **0** < **b** < **1**

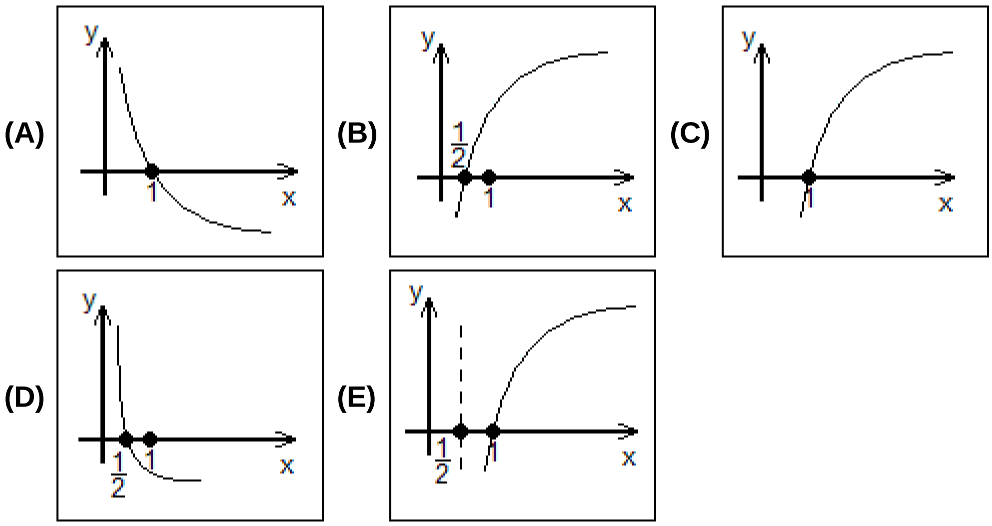
Nestes gráficos devemos observar, principalmente, duas propriedades. Note que os cortes no eixo x, em ambos os gráficos, ocorre no ponto 1. Isso está de acordo com a 1° Consequência da Definição de logaritmos, que diz que logaritmo de 1 em qualquer base é ZERO.

E o *eixo y* é uma assíntota vertical, ou seja, a curva não toca o eixo y nunca, apenas vai chegando cada vez mais perto, sem tocar.

ATIVIDADE COMENTADA

Observe a aplicação em um exercício do tema:

1) A representação geométrica que melhor representa o gráfico da função real de variável real x, dada por $f(x) = \log_{\left(\frac{1}{2}\right)} x$ **, é:**

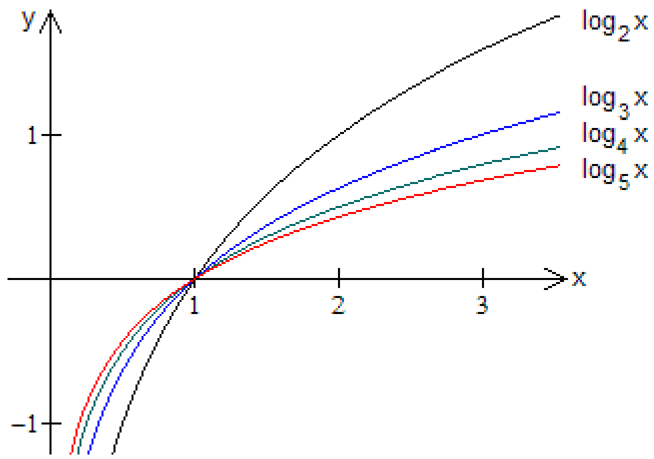


O enunciado nos diz que o logaritmo pedido possui base igual a $\frac{1}{2}$, ou seja, sendo um valor entre 0 e 1 só pode ser um logaritmo decrescente.

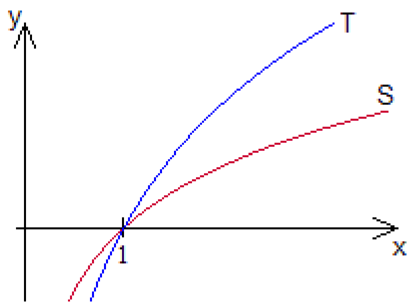
Dentre as alternativas, somente as letras A e D são decrescentes, mas somente a alternativa A corta o eixo x no ponto 1.

Resposta correta, letra A.

Devemos saber também que, quanto maior a base de um logaritmo, mais próximo de ambos os eixos estará seu gráfico. Veja a figura abaixo:



2) Na figura, a curva S representa o cunjunto solução da equação $y = \log_a x$ e a curva T, o conjunto solução da equação $y = \log_b x$. Tem-se



(A) a < b < 1

(B) 1 < b < a

(C) 1 < a < b

(D) b < a < 1

(E) b < 1 < a

Os dois gráficos representam logaritmos crescentes, ou seja, ambas as bases são maiores do que 1. Ficamos então entre as alternativas B e C.

Devemos então saber qual a relação entre *a* e *b*. Como a curva S está mais próxima dos eixos x e y do que a curva T, então sua base é maior (a > b).

Portanto, resposta correta, letra B.

REFERÊNCIAS

SOUZA, Joamir. ***Coleção Novo Olhar - Matemática*** . Vol. 1. 1ªEdição.Editora FTD, 2011.

RIBEIRO, Jackson - **Ciência linguagem e tecnologia - Matemática**. Vol. 1. 1ªEdição.Editora Scipione, 2012.

DANTE, Luiz Roberto. *Matemática*: *contexto e aplicações*. Vol. Único. Editora Ática, 2009.

YOUSSEF, Antônio N., Soares, Elizabeth, Fernandez, Vicente Paz. **Matemática** – Vol. Único.1ªEdição. Ed. Scipione. São Paulo. 2011

PAIVA, Manoel. **Matemática** –Vol. Único.1ªEdição. Ed. Moderna. São Paulo. 2005